

高中数学竞赛专题讲座（第二辑）

丛书主编 陶平生 冯跃峰 边红平

DITUI YU DITUIFANGFA

递推与递推方法

李世杰 主编

浙江大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高中数学竞赛专题讲座. 递推与递推方法/李世杰主编. —杭州：浙江大学出版社，2008.7
ISBN 978-7-308-06087-5

Ⅰ. 高… Ⅱ. 李… Ⅲ. 代数课—高中—教学参考资料
Ⅳ. G634.603

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第095012号

高中数学竞赛专题讲座(递推与递推方法)

本书主编　李世杰

责任编辑　黄娟琴
文字编辑　许佳颖
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
　　　　　(杭州天目山路148号　邮政编码310028)
　　　　　(E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn)
　　　　　(网址：http://www.zjupress.com)
排　　版　杭州大漠照排印刷有限公司
印　　刷　德清县第二印刷厂
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　18.75
字　　数　392千
版 印 次　2008年7月第1版　2008年7月第1次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-06087-5
定　　价　28.50元

丛书编委会

编写说明

《高中数学竞赛专题讲座》(第一辑)12种出版以来,反响强烈,深受广大读者喜爱,并收到了大量反馈信息。很多读者,包括一线竞赛辅导的教师和竞赛研究人员提出了许多宝贵的建设性意见,希望我们再组织出版一套以解题方法和解题策略为主的丛书。为了满足广大读者的需求,我们在全国范围内组织优秀的数学奥林匹克教练编写了《高中数学竞赛专题讲座》(第二辑)共8种:《图论方法》、《周期函数与周期数列》、《代数变形》、《极值问题》、《染色与染色方法》、《递推与递推方法》、《组合构造》;考虑到配套,把第一辑中《数学结构思想及解题方法》放在第二辑出版。

丛书的起点是高中阶段学生必须掌握的数学基本知识和全国数学竞赛大纲要求的一些基本的数学思想、方法,凡是对数学爱好的高中学生都有能力阅读。丛书的特点是:

1. 充分吸收了世界各地的优秀数学竞赛试题,通过对典型例题的解剖,传授数学思想方法,侧重培养学生的逻辑思维能力,不唯解题而解题;

2. 本着少而精的原则选择材料,不搞题海战术,不追求大而全,而是以点带面,举一反三;

3. 以数学修养和能力培养为立意,通过深刻剖析问题的数学背景,挖掘数学内涵,培养学生的数学品格和解决实际问题的能力;

4. 在注重基础知识训练同时,有适当程度的拔高,对参加冬令营甚至是更高层次的竞赛都有相当的指导作用和参考价值。

丛书由陶平生、冯跃峰、边红平主编;参加编写的成员是:陶平生、冯跃峰、边红平、王慧兴、李世杰、蔡小雄、许康华。

鉴于我们的水平有限,书中的不妥之处敬请读者批评指正。



录





第1讲　递推定义

在纷繁变幻的世界里，所有事物都随时间的流逝在不经意之中发生着微妙的变化，而许多现象的变化是有规律可循的．这种规律往往呈现出前因后果的关系，即某种现象的变化结果与紧靠它前面变化的一个或一些结果紧密相关．这种情况反映到数学上，就是递推关系，体现的正是递推的思想，所以我们可以运用递推的思想去研究这些变化．递推关系不仅在众多数学分支如组合、概率、几何、矩阵中起着重要作用，也在其他诸如信息学等科学领域中显示出独特魅力．

知识扫描

1．递推定义

所谓递推，是指从已知的初始条件出发，逐次推出所要求的各个中间结果和最后结果．其中，初始条件或问题已给定，或通过对问题进行分析与化简后确定．

作为数学的一种重要思想，递推思想体现了世界上许多事物现象变化所遵循的前因后果的关系，因此具有广泛的应用．递推本质上也属于归纳法．许多递推公式，实际上是通过对实际问题的分析与归纳而得到的，因此，递推是归纳的结果．利用问题本身所具有的一种递推关系去解决问题的一种方法，称为递推方法．

递推不仅有顺推、逆推，还与数学归纳法(仅不用预知结论)、无穷递降法相关，关键是找出前一命题与后一命题之间的递推关系．

用递推方法解题的一般步骤：

(1) 设某一过程为$\{f(n)\}$(通常为数列)，求出初始值$f(1)$、$f(2)$等，取值的个数由第二步递推的需要决定．

(2) 找出$f(n)$与$f(n-1)$、$f(n-2)$等之间的递推关系．

(3) 求解递推关系，或论证递推关系的性质．

2. 利用递推方法解题的主要方式

(1) 用递推数列的方法来计数或论证；

(2) 用数学归纳法来论证；

(3) 用无穷递降法来论证否定性的命题.

3. 利用递推方法解题的一些预备知识

(1) 数列中的递推关系. 已知数列的前 k 项，且任一项 a_n 与它的前一项(或前若干项)$a_{n-1}(n\geqslant 2)$间的关系可以用一个公式来表示，这个公式称为数列的递推公式. 递推公式是给出数列的一种方法. 利用起始项，由递推公式可写出数列的前有限项.

如：数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，前 n 项和 S_n 与通项 a_n 满足递推关系式：$S_n=S_{n-1}+a_n(n\geqslant 2)$，或 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$

注意：数列是特殊的函数. 特殊在定义域是自然数集或由 1 为首的有限个连续自然数组成的集合. 其图像是无限个或有限个孤立的点. 因此，用函数观点看数列，数列的动态的、整体的性质会显现得更加清楚. 特别要注意的是，仅仅给出有限项的数列，如果没有界定性的文字限定，它的通项公式一定有无限多个.

(2) 不等的传递性：由 $a>b, b>c\Rightarrow a>c$，可知 $a_{n+1}>a_n(n\in\mathbf{N}^*)\Rightarrow a_n>a_1(n\geqslant 2)$.

(3) 数论中整除的传递性.

(4) 由有限推到无限的方法：数学归纳法、无穷递降法、周期函数的方法等.



例题分析

例 1 (2007 年上海市高考理科卷试题)设 $f(x)$是定义在正整数集上的函数，且 $f(x)$满足："当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时，总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立". 那么，下列命题总成立的是 ( )

A. 若 $f(3)\geqslant 9$ 成立，则当 $k\geqslant 1$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立；

B. 若 $f(5)\geqslant 25$ 成立，则当 $k\leqslant 5$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立；

C. 若 $f(7)<49$ 成立，则当 $k\geqslant 8$ 时，均有 $f(k)<k^2$ 成立；

D. 若 $f(4)=25$ 成立，则当 $k\geqslant 4$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立.

解 我们用符号"⇒"表示题给条件，即：

$$f(k)\geqslant k^2\Rightarrow f(k+1)\geqslant(k+1)^2, \tag{1}$$

在(1)式中，用 $k+1$ 替换 k，得

$$f(k+1)\geqslant(k+1)^2\Rightarrow f(k+2)\geqslant(k+2)^2,$$



这样，利用(1)式反复递推，可得

$$f(k+2)\geqslant(k+2)^2\Rightarrow f(k+3)\geqslant(k+3)^2,$$
$$f(k+3)\geqslant(k+3)^2\Rightarrow f(k+4)\geqslant(k+4)^2,$$
$$\cdots$$

一般地，当 $k,m\in\mathbf{N}$，$k\leqslant m$ 时，可得 $f(k)\geqslant k^2\Rightarrow f(m)\geqslant m^2$.

(A)中 $f(3)\geqslant 9(=3^2)$成立，可以推出 $k\geqslant 3$ 时，$f(k)\geqslant k^2$ 成立，但推不出 $k=1,2$ 时，$f(k)\geqslant k^2$ 成立，排除 A.

(B)中 $f(5)\geqslant 25(=5^2)$成立，可以推出 $k\geqslant 5$ 时，$f(k)\geqslant k^2$ 成立，但推不出 $k=1,2,3,4$ 时，$f(k)\geqslant k^2$ 成立，排除 B.

(C)中不等式 $f(7)<49$ 与不等式 $f(k)\geqslant k^2$ 不等号方向不一致，且(1)中的推出符号是单向的，排除 C.

(D)中 $f(4)=25>4^2$ 成立，可以推出当 $k\geqslant 4$ 时，均有 $f(k)\geqslant k^2$ 成立.

故选 D.

说明 将 $f(x)$的定义域是正整数集改为 $\mathbf{R}^+$，条件"当 $f(k)\geqslant k^2$ 成立时，总可推出 $f(k+1)\geqslant(k+1)^2$ 成立"保持不变，则本题的结论仍然成立. 原因是涉及内在本质的递推的基础未变，但得出的结论将更丰富. 如：

$$f(1.2)\geqslant 1.2^2\Rightarrow f(2.2)\geqslant 2.2^2\Rightarrow f(3.2)\geqslant 3.2^2,\cdots.$$

有兴趣的读者可自行探索.

例 2 对任意实数 x，函数 $f(x)$有性质 $f(x)+f(x-1)=x^2$. 如果 $f(19)=94$，那么，$f(94)$除以 1000 的余数是多少?

解 重复使用 $f(x)=x^2-f(x-1)$ 递推，有

$$\begin{aligned}
f(94)&=94^2-f(93)\\
&=94^2-93^2+f(92)\\
&=94^2-93^2+92^2-f(91)\\
&=\cdots\\
&=94^2-93^2+92^2-\cdots+20^2-f(19)\\
&=(94+93)(94-93)+(92+91)(92-91)+\cdots+(22+21)(22-21)+20^2-94\\
&=(94+93+92+\cdots+21)+306\\
&=4561.
\end{aligned}$$

因此，$f(94)$除以 1000 的余数是 561.

说明 在反复利用 $f(x)=x^2-f(x-1)$的过程中，不逐个算出 $94^2,93^2,\cdots,20^2$ 的值，而是放到最后，利用平方差公式，使计算得以简化. 这是一种整体把握数学问题的思

想方法.

例 3 (2005 年湖北省高考理科卷压轴题第 1 小题)已知不等式$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\frac{1}{2}[\log_2 n]$,其中 n 为大于 2 的整数,$[\log_2 n]$ 表示不超过 $\log_2 n$ 的最大整数,设数列$\{a_n\}$的各项为正,且满足$a_1=b(b>0)$,$a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$,$n=2,3,4,\cdots$. 证明:$a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$,$n=3,4,5,\cdots$.

证明 因为当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n>0$,且 $a_n\leqslant\frac{na_{n-1}}{n+a_{n-1}}$,两边取倒数得:

$\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{n+a_{n-1}}{na_{n-1}}=\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{n}$,即$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\geqslant\frac{1}{n}$,

反复使用此不等式递推,得

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}&=\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\\&\geqslant\frac{1}{n}+\frac{1}{n-1}+\cdots+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}>\frac{1}{2}[\log_2 n].\end{aligned}$$

所以,$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{a_1}+\frac{1}{2}[\log_2 n]$,即$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{b}+\frac{1}{2}[\log_2 n]$,故 $a_n<\frac{2b}{2+b[\log_2 n]}$.

注 这里利用不等关系的递推,避免了使用数学归纳法,证明过程十分简洁.

例 4 已知 $a+b+c=1$,$a^2+b^2+c^2=2$,$a^3+b^3+c^3=3$,求 $a^4+b^4+c^4$ 的值.

解 我们研究一般情形的结论:美国数学家 S. C. Locke 教授曾提出一个有趣的幂和问题:已知 $a+b+c=1$,$a^2+b^2+c^2=2$,$a^3+b^3+c^3=3$,如何求 $a^n+b^n+c^n$. 下面用递推方法给出该问题的递归解.

设 $f(n)=a^n+b^n+c^n$,

$A_1=a^{n-1}b+a^{n-1}c+b^{n-1}a+b^{n-1}c+c^{n-1}a+c^{n-1}b$,

$A_2=a^{n-2}b^2+a^{n-2}c^2+b^{n-2}a^2+b^{n-2}c^2+c^{n-2}a^2+c^{n-2}b^2$,

$A_3=a^{n-3}b^3+a^{n-3}c^3+b^{n-3}a^3+b^{n-3}c^3+c^{n-3}a^3+c^{n-3}b^3$,

$A_4=a^{n-2}bc+b^{n-2}ac+c^{n-2}ab$,

$A_5=a^{n-3}b^2c+a^{n-3}bc^2+b^{n-3}a^2c+b^{n-3}c^2a+c^{n-3}a^2b+c^{n-3}b^2a$.

则 $f(n-1)f(1)=f(n)+A_1$, (1)

$f(n-2)f(2)=f(n)+A_2$, (2)

$f(n-3)f(3)=f(n)+A_3$, (3)

$$f(n-2)f^2(1) = f(n) + 2A_1 + A_2 + 2A_4, \tag{4}$$

$$f(n-3)f(2)f(1) = f(n) + A_1 + A_2 + A_3 + A_5, \tag{5}$$

$$f(n-3)f^3(1) = f(n) + 3A_1 + 3A_2 + A_3 + 6A_4 + 3A_5. \tag{6}$$

由(6) − 3×(5) − 3×(4) + 2×(3) + 3×(2) + 6×(1)，可得

$$6f(n) = f(n-3) + 3f(n-2) + 6f(n-1)$$

即 $f(n) = \dfrac{f(n-3) + 3f(n-2) + 6f(n-1)}{6}$.

令 $n = 4$，即得本题欲求的结论：

$$a^4 + b^4 + c^4 = f(4) = \frac{f(1) + 3f(2) + 6f(3)}{6} = \frac{1 + 3\times 2 + 6\times 3}{6} = \frac{25}{6}.$$

说明 找到了一般情形下 $f(n)$ 与 $f(n-1)$、$f(n-2)$、$f(n-3)$ 的递推关系，就彻底解决了这一类求值问题.

如果我们改变问题的约束条件，可将幂和问题推广为更一般的情形：

定理 设 $f(1) = a + b + c = A$，$f(2) = a^2 + b^2 + c^2 = B$，$f(3) = a^3 + b^3 + c^3 = C$，

则 $f(n) = Af(n-1) + \dfrac{B - A^2}{2}f(n-2) + \left(\dfrac{1}{6}A^3 - \dfrac{1}{2}AB + \dfrac{1}{3}C\right)f(n-3)$.

证明 由于 $f(1) = a + b + c = A$, (7)

$$f(2) = a^2 + b^2 + c^2 = B, \tag{8}$$

$$f(3) = a^3 + b^3 + c^3 = C. \tag{9}$$

则：$(7)^2 - (8)$ 得 $ab + ac + bc = \dfrac{A^2 - B}{2}$.

(7)×(8) 得 $a^3 + b^3 + c^3 + a^2b + a^2c + b^2a + b^2c + c^2a + c^2b = AB$,

所以 $ab(a+b) + bc(b+c) + ac(a+c) = AB - C$,

$$abc = \frac{1}{6}A^3 - \frac{1}{2}AB + \frac{1}{3}C.$$

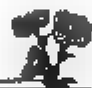
而 $(a^{n-1} + b^{n-1} + c^{n-1})(a + b + c)$

$= a^n + b^n + c^n + a^{n-1}b + a^{n-1}c + b^{n-1}a + b^{n-1}c + c^{n-1}a + c^{n-1}b$,

即 $Af(n-1) = f(n) + ab(a^{n-2} + b^{n-2}) + bc(b^{n-2} + c^{n-2}) + ac(a^{n-2} + c^{n-2})$,

$Af(n-1) = f(n) + f(n-2)(ab + bc + ac) - abcf(n-3)$,

所以 $f(n) = Af(n-1) + \dfrac{B - A^2}{2}f(n-2) + \left(\dfrac{1}{6}A^3 - \dfrac{1}{2}AB + \dfrac{1}{3}C\right)f(n-3)$.



例 5 若 $f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，对任意的 $x,y\in\mathbf{R}$，$f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，且 $f(1)=1$，证明：$f(x)$ 为周期函数.

解 此题条件 $f(1)=1$ 暗含了递推关系：

取 $y=1$ 代入 $f(x+y)=\dfrac{f(x)+f(y)}{1-f(x)f(y)}$，就有 $f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$.

由此出发继续递推下去：

$$f(x+2)=f[(x+1)+1]=\frac{1+f(x+1)}{1-f(x+1)},$$

以 $f(x+1)=\dfrac{1+f(x)}{1-f(x)}$ 代入得

$$f(x+2)=-\frac{1}{f(x)},$$

$$f(x+3)=f[(x+2)+1]=\frac{1+f(x+2)}{1-f(x+2)},$$

以 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$ 代入，可得

$$f(x+3)=\frac{f(x)-1}{f(x)+1},$$

$$f(x+4)=f[(x+3)+1]=\frac{1+f(x+3)}{1-f(x+3)},$$

又以 $f(x+3)=\dfrac{f(x)-1}{f(x)+1}$ 代入，即得

$$f(x+4)=f(x).$$

所以，$T=4$ 是 $f(x)$ 的一个周期，故 $f(x)$ 是周期函数.

说明 解决题设中出现函数方程的递推问题的关键是：迅速将条件中的隐性递推关系转换为显性递推关系式. 本题如由 $f(x+2)=-\dfrac{1}{f(x)}$，得 $f(x+4)=f[2+(x+2)]=-\dfrac{1}{f(x+2)}=f(x)$，解答过程更简洁.

例 6 （第 15 届“希望杯”高一第 1 试第 21 题）在数列中找出丢失的数：3，6，13，28，______，122，249，______.

常见的解法 所给数列的通项公式是 $a_n=2a_{n-1}+n-2$，所以缺少的项是

$$a_5=2\times28+3=59,a_8=2\times249+6=504.$$

评析 上面的解答完整吗?众所周知,仅给出有限项的数列,通项公式是不惟一的.所给数列的通项公式也可以是

$$a_n=2a_{n-1}+n-2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)\times(n-7).$$

实际上,这里 a_5,a_8 可以取任意值.设所给数列的通项公式为

$$a_n=2a_{n-1}+n-2+(xn+y)(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-6)(n-7),x,y\in\mathbf{R}.$$

其中待定系数 x,y 由方程组

$$\begin{cases}a_5=2a_4+5-2+(5x+y)(5-1)(5-2)(5-3)(5-4)(5-6)(5-7),\\a_8=2a_7+8-2+(8x+y)(8-1)(8-2)(8-3)(8-4)(8-6)(8-7)\end{cases}$$

惟一确定.

思考 已知数列$\{a_n\}$:1,2,3,a_4,…,其中,$a_4\neq4$,能否写出数列$\{a_n\}$满足如下条件的一个通项公式:① 含n的多项式;② 把n作为指数.

解法1 根据数列的前几项写出通项公式,设法加一个 $n=1,2,3$ 时都为零的表达式.显然,$n=1,2,3$ 时,$(n-1)(n-2)(n-3)=0$.

$a_n=n+(n-1)(n-2)(n-3),n\in\mathbf{N}^*$,$a_4=4+(4-1)(4-2)(4-3)=10$,符合要求.

能否再写出一个与上式不同的通项公式?第4项能为任意实数a吗?设

$$a_n=n+x(n-1)(n-2)(n-3),n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R},x\neq1.$$

令 $a_4=4+x(4-1)(4-2)(4-3)=a$,$x=\dfrac{a-4}{6}$,

即 $$a_n=n+\frac{a-4}{6}(n-1)(n-2)(n-3),n\in\mathbf{N}^*,x\in\mathbf{R}$$

此时,第4项为任意实数a.

解法2 根据数列的前两项写出通项公式,设法加一个 $n=1,2$ 时都为零的表达式.显然 $n=1,2$ 时,$(n-1)(n-2)=0$,注意到 $a_1=1=2^0$,$a_2=2=2^1$,我们可设 $a_n=2^{n-1}+x(n-1)(n-2)$,由于 $a_3=3$,所以 $2^{3-1}+x(3-1)(3-2)=3$,$x=-\dfrac{1}{2}$,此时,$a_n=2^{n-1}-\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$,$a_4=5$,满足要求.

能否再写出一系列不同的通项公式,如含有绝对值,对数式的通项?

类似地可得,① $a_n=2+(n-2)|n-2|$;② $a_n=2+(n-2)(2\log_2 n-1)$;③ $a_n=2-\sin\dfrac{n\pi}{2}$.

说明 类似例6的求通项公式,是根据已知的前若干项,用递推思想推断一般项.但



结论是开放的,满足条件的数列有无穷多个.

例 7 一则数学游戏:前两个数是 1,1,以后每个数等于它前一数与 1 的和除以它前面第二数的商,那么第 500 个数是几?

分析 我们先把题目中的数串写出来:

$$1,1,2,3,2,1,1,2,3,2,1,1,2,3,\cdots \tag{1}$$

据此,我们猜想:它是以 5 为周期的周期数列.若设 $x_1=a,x_2=b$,则 a,b 为何值时,x_n 是无穷周期数列?通项公式是什么?下面来解决这些问题.

解 设 $x_1=a,x_2=b,ab\neq 0$,按游戏规则,得

$$x_3=\frac{b+1}{a},x_4=\frac{\frac{b+1}{a}+1}{b}=\frac{a+b+1}{ab},x_5=\frac{\frac{a+b+1}{ab}+1}{\frac{b+1}{a}}=\frac{a+1}{b},$$

其中,$a+1\neq 0,b+1\neq 0,a+b+1\neq 0$.

继续算下去:

$$x_6=\frac{\frac{a+1}{b}+1}{\frac{a+b+1}{ab}}=\frac{\frac{a+b+1}{b}}{\frac{a+b+1}{ab}}=a,x_7=\frac{a+1}{\frac{a+1}{b}}=b,\cdots$$

易见:$x_6=x_1,x_7=x_2,x_8=x_3,x_9=x_4,\cdots$,于是我们得到了:

设 $x_1=a,x_2=b,x_n=\frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}}(n>2)$,则当 $ab\neq 0,a\neq -1,b\neq -1,a+b\neq -1$ 时,$\{x_n\}$ 为无穷周期数列,周期为 5.它的通项公式(一个周期)为

$$x_n=\begin{cases}a, & n\equiv 1(\text{mod } 5),\\ b, & n\equiv 2(\text{mod } 5),\\ \frac{b+1}{a}, & n\equiv 3(\text{mod } 5),\\ \frac{a+b+1}{ab}, & n\equiv 4(\text{mod } 5),\\ \frac{a+1}{b}, & n\equiv 0(\text{mod } 5).\end{cases}\quad(n=1,2,3,\cdots) \tag{2}$$

由于 $500\equiv 0(\text{mod } 5)$,所以第 500 个数是 2.

注 留下来的问题是:当起始两个数为什么数时,数列 $\{x_n\}$ 的项总是整数?

由(1)可以看出,当 (a,b) 为 $(1,1)$,$(1,2)$,$(2,1)$,$(2,3)$,$(3,2)$ 时,$\{x_n\}$ 总是整数数列.在正整数范围内,只有这些吗?我们来考虑这个问题.按(2),这就是当 k,l,m 为正整数时,我们要求



$$\begin{cases} \dfrac{b+1}{a}=k, & ① \\ \dfrac{a+b+1}{ab}=l, & ② \\ \dfrac{a+1}{b}=m & ③ \end{cases} \tag{3}$$

的整数解，我们的办法是着重求解②，而通过①和③加以检验筛选. 由于 $l \geqslant 1$，由②可得

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} \geqslant 1.$$

由于对称性，先设 $a \leqslant b$，由于 $b \geqslant 1$，$a \leqslant ab$，故

$$\frac{3}{a} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{ab} \geqslant 1,$$

也就是 $a \leqslant 3$. 于是有 $a=1, 2, 3$，可得如下一些数对(由 $a \leqslant b$)：

$$a=1, b=1, 2, 3;$$

$$a=2, b=2, 3;$$

$$a=3, b=3.$$

代入(2)式中检验，合适的有(1, 1)，(1, 2)，(2, 3)，再应用对称性，即知(2, 1)，(3, 2)也合适. 于是，使得 $x_n = \frac{x_{n-1}+1}{x_{n-2}}$，$x_1=a$，$x_2=b$ 为整数数列的(a, b)的正整数对，只有五对：(1, 1)，(1, 2)，(2, 1)，(2, 3)和(3, 2).

1974 年，米哈伊尔·索莫斯(Michael Somos)在研究椭圆 θ 函数的性质时，发现了一个无穷数列：

$$\begin{cases} a_n = 1, & 0 \leqslant n \leqslant 5, \\ a_n = \dfrac{a_{n-1}a_{n-5}+a_{n-2}a_{n-4}+a_{n-3}^2}{a_{n-6}}, & n \geqslant 6. \end{cases} \tag{4}$$

其前 14 项是，1, 1, 1, 1, 1, 1, 3, 5, 9, 23, 75, 421, 1103, 5047, 41783

令人惊奇的是，在我们的眼睛和计算机所能“看到”的范围内，(4)总是产生整数.

本题中我们只讨论了一个十分简单的情形.

例 8 设有甲、乙两堆小球，各有小球若干. 如果按照下列规则挪动小球：第 1 次从甲堆拿出和乙堆同样多的小球放到乙堆，第 2 次从乙堆拿出和甲堆同样多的小球放到甲堆，…，那么，挪动 8 次后，甲、乙两堆所有的小球一样多. 问甲、乙两堆原先最少应各有小球多少个？

分析 若按照挪动小球的程序一步步顺推，则解题过程十分复杂，演算时容易产生



差错 注意到小球经过 8 次挪动后，甲、乙两堆小球数量相等，所以从这一结果出发进行逆推，有可能得到简便的解法.

解 设原先甲、乙两堆最少共有 x 个小球. 第 8 次从乙堆拿小球放入甲堆后，两堆小球个数相同，各为 $\frac{x}{2}$ 个. 那么，在乙堆挪动前，甲堆所有的小球的个数是 $\frac{x}{2}$ 的一半，即 $\frac{x}{4}$ 个；乙堆所有小球的个数是 $x-\frac{x}{4}=\frac{3}{4}x$ 个，而这就是第 8 次乙堆挪动前的情况(即第 7 次甲堆挪动后的情况). 上面是逆推过程的第一步，其余各步如下表所示(表中箭头表示逆推程序)

逆推过程	甲堆	乙堆
第 8 次挪动后(两堆小球个数相等)	$\frac{x}{2}$	$\frac{x}{2}$
第 8 次挪动前(即第 7 次挪动后)	$\frac{x}{2}\div 2=\frac{x}{4}$	$x-\frac{x}{4}=\frac{3}{4}x$
第 7 次挪动前(即第 6 次挪动后)	$x-\frac{3}{8}x=\frac{5}{8}x$	$\frac{3}{4}x\div 2=\frac{3}{8}x$
第 6 次挪动前(即第 5 次挪动后)	$\frac{5}{8}x\div 2=\frac{5}{16}x$	$x-\frac{5}{16}x=\frac{11}{16}x$
第 5 次挪动前(即第 4 次挪动后)	$x-\frac{11}{32}x=\frac{21}{32}x$	$\frac{11}{16}x\div 2=\frac{11}{32}x$
第 4 次挪动前(即第 3 次挪动后)	$\frac{21}{32}x\div 2=\frac{21}{64}x$	$x-\frac{21}{64}x=\frac{43}{64}x$
第 3 次挪动前(即第 2 次挪动后)	$x-\frac{43}{128}x=\frac{85}{128}x$	$\frac{43}{64}x\div 2=\frac{43}{128}x$
第 2 次挪动前(即第 1 次挪动后)	$\frac{85}{128}x\div 2=\frac{85}{256}x$	$x-\frac{85}{256}x=\frac{171}{256}x$
第 1 次挪动前(即开始时的情况)	$x-\frac{171}{512}x=\frac{341}{512}x$	$\frac{171}{256}x\div 2=\frac{171}{512}x$

从上述逆推过程可知，甲堆原有小球 $\frac{341}{512}x$ 个，乙堆原有小球 $\frac{171}{512}x$ 个. 因为 $\frac{341}{512}$ 与 $\frac{171}{512}$ 均为既约分数，为了使小球数为最小正整数，应取 $x=512$. 由此，甲堆原先最少应有小球 341 个，乙堆最少应有小球 171 个.

答：甲堆原先最少应有小球 341 个；乙堆原先最少应有小球 171 个

说明 例 8 还可作进一步的推广，如果把条件中的 8 次改为 $2n$ 次，则相应的答案为：甲堆原先最少应有小球 $\frac{2^{2n+2}-1}{3}$ 个，乙堆原先最少应有小球 $\frac{2^{2n+1}+1}{3}$ 个. 这个问题留给读



者思考.

在思维科学中,按照思维的方向,把由此及彼与由彼及此的思考,分别称为顺向思维与逆向思维, 者构成了思维的双向性,通常,人们习惯采用顺向思维.本例采用的是间接化策略,主要采用逆向思维的方式.

所谓间接化策略,就是当我们面临的是一道从正面入手复杂繁难,或在特定场合甚至找不到解题依据的题目时,要随时改变思维方向,从结论(或问题)入手或从条件、结论(或问题)的反面进行思考,以便化难为易解出原题.

在具体解题时,可以从题目的实际情形出发,通过多种方式实施间接化策略.常用的途径有:顺推有困难时,可以考虑逆推;直接解题有困难时,可以考虑间接求解;直接证明有困难时,可以考虑间接证明;肯定命题有困难时,可以考虑否定命题

例 9 (第 11 届"希望杯"高一竞赛题)给定 n 个数:$a_1=0.5^{0.5}$,$a_k=0.5^{a_{k-1}}$ $(k=2,3,\cdots,n)$,将这 n 个数由大到小排成一列.定义:第 k 位上恰是 a_k 的数 $k(k\geqslant 2)$ 叫做希望数,试求 $n=2999$ 时的希望数.

解 设 $f(x)=0.5^x$,则 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上是减函数.

记 $a_1=f(0.5)$,$a_k=f_k(0.5)=\underbrace{f\{f\cdots[f}_{k个f}(0.5)]\}$.

利用函数的单调递减性,得

$$f(0.5)>f_2(0.5),$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>f_2(0.5),$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>f_4(0.5)>f_2(0.5),$$

$$\cdots$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>\cdots>f_{2n-1}(0.5)>f_{2n}(0.5)>\cdots>f_2(0.5),$$

$$f(0.5)>f_3(0.5)>\cdots>f_{2n+1}(0.5)>f_{2n}(0.5)>\cdots>f_2(0.5),$$

即

$$a_1>a_2$$

$$a_1>a_3>a_2,$$

$$a_1>a_3>a_4>a_2,$$

$$\cdots$$

$$a_1>a_3>\cdots>a_{2n-1}>a_{2n}>\cdots>a_2,$$

$$a_1>a_3>\cdots>a_{2n+1}>a_{2n}>\cdots>a_2$$

可见,当 $n=2$ 时,希望数 $k=2$;

当 $n=5$ 时,希望数 $k=4$;



当 $n=8$ 时，希望数 $k=6$；

…

当 $n=3m-1$ 时，希望数 $k=2m$，其中 $m\in \mathbf{N}^*$.

又由 $2999=3\times1000-1$ 可知，当 $n=2999$ 时，所求希望数为：$2\times1000=2000$

说明 我们可以一般地计算希望数.

对于按如上方式排列的 n 个数的足标构成的数列，显然，前面的 $\frac{n}{2}$ 个足标中不会有希望数(因为 $k<2k-1$，当 $k>1$ 时). 若有，只能在后面的 $\frac{n}{2}$ 个足标中. 设第 k 位上的足标是希望数，则此第 k 位是从右向左数过来的第 $n-k+1$ 位. 于是 $k=2(n-k+1)$，且 $k>\frac{n}{2}$. 则 $3k=2(n+1)$.

因此，当且仅当 $3\mid(n+1)$ 时才会有希望数 $k=\frac{2}{3}(n+1)$. 亦即，只有当 $n=3m-1$ 时才有希望数，且是惟一的.

例 10 求 $\sqrt{2008+2004\sqrt{2009+2005\sqrt{2010+2006\sqrt{\cdots}}}}$ 的值.

解 设 $f(x)=\sqrt{x+(x-4)\sqrt{(x+1)+(x-3)\sqrt{(x+2)+(x-2)\sqrt{\cdots}}}}$，则 $f(x)$ 满足下列函数方程：

$$[f(x)]^2=x+(x-4)f(x+1).$$

而由恒等式 $(x-2)^2=x+(x-4)(x-1)$ 知，$f(x)=x-2$ 是它的一个解.

由于题中 $f(2008)$ 是一个惟一确定的值，则它应当只有惟一解

下面证明当 $x\geqslant6$ 时，原函数方程只有惟一解 $f(x)=x-2$.

首先当 $x\geqslant6$ 时，
$$f(x)>\sqrt{(x-4)\sqrt{(x-3)\sqrt{(x-2)\sqrt{\cdots}}}}$$
$$>\sqrt{(x-4)\sqrt{(x-4)\sqrt{(x-4)\sqrt{\cdots}}}}$$
$$=(x-4)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots}=x-4\geqslant\frac{1}{2}(x-2).$$

其次，当 $x\geqslant6$ 时，

$$f(x)<\sqrt{(2x-4)\sqrt{(2x-2)\sqrt{2x\sqrt{(2x+2)\sqrt{\cdots}}}}}$$
$$<\sqrt{2(x-2)\sqrt{4(x-2)\sqrt{8(x-2)\sqrt{\cdots}}}}$$



$$= (x-2)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots} \cdot 2^{\frac{1}{2}} \cdot 4^{\frac{1}{4}} \cdot 8^{\frac{1}{8}} \cdot \cdots$$
$$= (x-2)2^{\frac{1}{2}+\frac{2}{4}+\frac{3}{8}+\cdots} = 4(x-2).$$

所以 $\quad \frac{1}{2}(x-2) < f(x) < 4(x-2) \quad (x \geqslant 6)$,

$$\frac{1}{2}(x-1) < f(x+1) < 4(x-1).$$

由 $f^2(x) = x + (x-4)f(x+1)$ 知

$$\frac{1}{2}(x-2)^2 < \frac{1}{2}x + (x-4)f(x+1) < f^2(x)$$
$$< 4x + (x-4)f(x+1) < 4(x-1)^2.$$

因此,$\frac{1}{\sqrt{2}}(x-2) < f(x) < \sqrt{4}(x-2) \quad (x \geqslant 6)$.

设 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}(x-2) < f(x) < 4^{2^{-k}}(x-2)$,

则 $$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}(x-1) < f(x+1) < 4^{2^{-k}}(x-1).$$

于是 $\quad \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}}(x-2)^2 < \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-k}} + (x-4)f(x+1) < f^2(x)$

$$< 4^{2^{-k}} + (x-4)f(x+1) < 4^{2^{-k}}(x-2)^2,$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2^{-(k+1)}}(x-2) < f(x) < 4^{2^{-(k+1)}}(x-2) \quad (x \geqslant 6).$$

这就证明了,对一切自然数 n,有 $\sqrt[2^n]{\frac{1}{2}}(x-2) < f(x) < \sqrt[2^n]{4}(x-2) \quad (x \geqslant 6)$.

令 $n \to +\infty$,得 $f(x) = x-2 (x \geqslant 6)$,则 $f(2008) = 2006$.

说明 本题的关键是把求特殊值问题归结为求某一函数方程的解,再根据函数方程的特点,利用初等代数的恒等式得出函数方程的一个解,并应用不等式夹逼证明函数方程只有惟一解.

例 11 (第 15 届"希望杯"高一第 1 试第 25 题) 设 $\{a_n\}$ 是集合 $\{2^s + 2^t \mid 0 \leqslant s < t$, 且 $s, t \in \mathbf{Z}\}$ 中所有的数从小到大排成的数列,则 $a_5 =$ ______,$a_{50} =$ ______.

解 集合中的元素从小到大排列,每个括号为一组,第 n 组有 n 个元素,依次为:

$(2^0 + 2^1)$;$(2^0 + 2^2, 2^1 + 2^2)$;$(2^0 + 2^3, 2^1 + 2^3, 2^2 + 2^3)$;…,显然,$a_5 = 2^1 + 2^3 = 10$.

因为 $1+2+3+4+5+6+7+8+9 = 45$,所以 a_{50} 是第 10 组中的第 5 个元素,即



$$a_{50} = 2^{4} + 2^{10} = 1040.$$

评析 本题以集合中元素排列的数组为背景，由表及里，层层深入地运用数学知识分析探索，揭示问题本质，具有较大的自由度和思维空间，渗透了研究性学习的理念 本题求解的关键是用递推的思想对所给集合$\{2^s+2^t\ 0\leqslant s<t$，且$s,t\in \mathbf{Z}\}$中的元素进行分组排序

思考 利用类似方法，可解决更一般的问题，如以下扩展问题

拓展问题1 （第15届"希望杯"高一第2试第14题）设$\{a_n\}$是集合$\{2^s+2^t+2^r\ 0\leqslant s<t<r$，且$r,s,t\in\mathbf{N}\}$中所有的数从小到大排成的数列，则$a$ = ______，a_{50} = ______.

解 根据数列$\{a_n\}$各项的幂指数s,t,r依次分组

(1) 0，1，2；

(2) 0，1，3；0，1，2；1，2，3；

(3) 0，1，4；0，2，4；1，2，4；0，3，4；1，3，4；2，3，4；

…

(n) 0，1，n；0，2，n；1，2，n；0，3，n；1，3，n；2，3，n；…；$n-2$，$n-1$，n

每组的项数依次为$1,1+2,1+2+3,\cdots,1+2+3+\cdots+n$.所以$a_5$是第(3)组的第1项，$a_5=2^0+2^1+2^4=19$.

a_{50}是第(6)组的第15项.因为：$1+2+3+4+5=15$，所以，$s=4,t=5,r=7$，$a_{50}=2^4+2^5+2^7=176$.

拓展问题2：(1) 设$\{a_n\}$是集合$\{2^s+2^t\mid 0\leqslant s<t$，且$s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数从小到大排列成的数列，即$a_1=3,a_2=5,a_3=6,a_4=9,a_5=10,a_6=12,\cdots$ 将数列$\{a_n\}$各项按照上小下大，左小右大的原则写成如下的三角形数表：

6

5　　6

9　　10　　12

…　　…　　…　　…

…　　…　　…　　…　　…

…　　…　　…　　…　　…　　…

① 写出这个三角形数表的第四行、第五行各数；② 求a_{100}.

(2) (2003年全国高考理科卷压轴题)设$\{b_n\}$是集合$\{2^r+2^s+2^t\mid 0\leqslant r<s<t$，且$r,s,t\in\mathbf{Z}\}$中所有的数都是从小到大排列成的数列，已知$b_k=1160$，求$k$

解 (1) ① 第四行为：17　18　20　24；第五行为　33　34　36　40　48

② 设$a_{100}=2^{s_0}+2^{t_0}$，只需确定正整数s_0,t_0.



数列$\{a_n\}$中小于2^{t_0}的项构成的子集为$\{2^s+2^t \mid 0\leqslant s<t<t_0\}$，其元素个数为$C_{t_0}^2=\frac{t_0(t_0-1)}{2}$，依题意$\frac{t_0(t_0-1)}{2}<100$.

满足等式的最大整数t_0为14，所以取$t_0=14$. 因为$100-C_{14}^2=s_0+1$，由此解得$s_0=8$，所以$a_{100}=2^{14}+2^8=16640$.

(2) $b_k=1160=2^{10}+2^7+2^3$.

令$M=\{c\in B \mid c<1160\}$(其中，$B=\{2^r+2^s+2^t \mid 0\leqslant r<s<t\}$)

因$M=\{c\in B \mid c<2^{10}\}\cup\{c\in B \mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}\cup\{c\in B \mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}$.

现在求M的元素个数：$\{c\in B \mid c<2^{10}\}=\{2^r+2^s+2^t \mid 0\leqslant r<s<t<10\}$，

其元素个数为C_{10}^3；$\{c\in B \mid 2^{10}<c<2^{10}+2^7\}=\{2^{10}+2^s+2^r \mid 0\leqslant r<s<7\}$

其元素个数为C_7^2；$\{c\in B \mid 2^{10}+2^7<c<2^{10}+2^7+2^3\}=\{2^{10}+2^7+2^r \mid 0\leqslant r<3\}$

其元素个数为C_{10}^3. 所以，$k=C_{10}^3+C_7^2+C_3^1+1=145$.

拓展问题 3：设$f(n)$，$g(n)$均为定义在自然数集N上的严格递增函数，且对任意$n\in\mathbf{N}$，都成立$f(n+1)+g(0)>f(n)+g(n-1)$. 数列$\{a_n\}$是集合$\{f(t)+g(s) \mid 0\leqslant s<t$，且$s,t\in\mathbf{N}\}$中所有的数从小到大排列成的数列，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 将数列$\{a_n\}$的项从小到大排成数表：

$a_1=f(1)+g(0)$；

$a_2=f(2)+g(0)$；$a_3=f(2)+g(1)$；

$a_4=f(3)+g(0)$；$a_5=f(3)+g(1)$；$a_6=f(3)+g(2)$；

$a_7=f(4)+g(0)$；$a_8=f(4)+g(1)$；$a_9=f(4)+g(2)$；$a_{10}=f(4)+g(3)$；

$a_{\frac{k(k-1)}{2}+1}=f(k)+g(0)$；$a_{\frac{k(k-1)}{2}+2}=f(k)+g(1)$；…；$a_{\frac{k(k-1)}{2}+i}=f(k)+g(i-1)$；…

$a_{\frac{k(k-1)}{2}+k}=f(k)+g(k-1)$；…

若a_n在数表的第k行，则由$a_{\frac{k(k-1)}{2}+i}=f(k)+g(i-1)$可知，当$\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1(k\in\mathbf{N})$时，$a_n=f(k)+g\left[n-1-\frac{k(k+1)}{2}\right]$.

由$\frac{k(k-1)}{2}+1\leqslant n<\frac{k(k+1)}{2}+1$，得$\begin{cases}k^2-k+2-2n\leqslant 0,\\ k^2+k+2-2n>0.\end{cases}$

解得$\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}<k\leqslant\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}$，且$\frac{1+\sqrt{8n-7}}{2}-\frac{-1+\sqrt{8n-7}}{2}=1$，



所以 $k=\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$（$[x]$表示不超过 x 的最大整数）.

故 $a_n=f(k)+g\left(n-1-\dfrac{k(k+1)}{2}\right)$，其中 $k=\left[\dfrac{1+\sqrt{8n-7}}{2}\right]$.

下面给出一个没有彻底解决的推广问题，留给有兴趣的读者进一步研究.

拓展问题 4：设集合 $A=\{m^{t_1}+m^{t_2}+\cdots+m^{t_k}\mid 0\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_k, t_i\in\mathbf{N}(i=1,2,\cdots,k)\}$.

(1) 若 A 中的元素是 k 个 m 的不同整数幂之和，将它们从小到大排成数列$\{a_n\}$，则 $a_5=$________

(2) 若 A 中的元素是若干个 m 的不同整数幂（包括 1 个）之和，将它们从小到大排列成数列$\{a_n\}$，则 $a_5=$________.

例 12 若 α,β 是二次方程 $x^2-6x+1=0$ 的两根，则对一切正整数 n，$\alpha^n+\beta^n$ 都是一个不能被 5 整除的整数.

证明 （用无穷递降法）设存在正整数 $n_1=m$，使 $\alpha^n+\beta^n$ 能被 5 整除.

由
$$\alpha^n+\beta^n=(\alpha+\beta)(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-\alpha\beta(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2}).\tag{1}$$

而 α,β 是方程 $x^2-6x+1=0$ 的根，所以 $\alpha+\beta=6$，$\alpha\beta=1$.

代入(1)式得

$$\begin{aligned}\alpha^n+\beta^n&=6(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})\\&=5(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+[(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})].\end{aligned}\tag{2}$$

根据假设 $\alpha^m+\beta^m$ 能被 5 整除，以 m 代入上式中的 n 可知

$$[(\alpha^{m-1}+\beta^{m-1})-(\alpha^{m-2}+\beta^{m-2})]$$

能被 5 整除，记作

$$5\mid[(\alpha^{m-1}+\beta^{m-1})-(\alpha^{m-2}+\beta^{m-2})].\tag{3}$$

以 $m-1$ 代(2)式中的 n 得

$$\alpha^{m-1}+\beta^{m-1}=5(\alpha^{m-2}+\beta^{m-2})+(\alpha^{m-2}+\beta^{m-2})-(\alpha^{m-3}+\beta^{m-3}),$$

所以 $\alpha^{m-3}+\beta^{m-3}=5(\alpha^{m-2}+\beta^{m-2})+(\alpha^{m-2}+\beta^{m-2})-(\alpha^{m-1}+\beta^{m-1})$.

从(3)式可知 $\alpha^{m-3}+\beta^{m-3}$ 也能被 5 整除，即存在比 n_1 小的正整数 $n_2=m-3$ 使 $\alpha^n+\beta^n$ 能被 5 整除.

同理，更存在比 n_2 小的正整数 $n_3=m-6$，使 $\alpha^n+\beta^n$ 能被 5 整除，这样不断递推下去就能得到一个无穷递降的正整数列

$$n_1>n_2>n_3>\cdots>0,\ n_i=m-3(i-1)$$



能使 $\alpha^n+\beta^n$ 当 $n=n_1$ 时被5整除，但这是不可能的，实际上

$$\alpha^0+\beta^0=2,\ \alpha^1+\beta^1=6,\ \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=34$$

都不能被5整除，因此前面的假设被推翻，证得原命题成立.

说明 本题所用的无穷递降法，最初由法国数学家费马所创，这是一种递推反证法，它的特点是利用递推方法，从反证假设出发，构造出一个无穷递降的正整数列，使之与正整数的性质相矛盾，从而推翻反证假设，证得原命题成立.



能力训练

1. (第18届"希望杯"高一竞赛题改编)已知定义在正整数集上的函数

$$f(n)=\begin{cases}n+2, & n\leqslant 2007,\\ f[f(n-4)], & n>2007,\end{cases}$$

则当 $2007<n\leqslant 2009$ 时，$n-f(n)=$ ( )

A. 0　　B. 2007　　C. -2　　D. 2008

2. (第1届"希望杯"高一竞赛题) $ABCD-A_1B_1C_1D_1$ 是单位立方体，黑、白二蚁都从点 A 出发沿棱向前爬行，每走完一条棱称为"走完一段"．白蚁爬行的路线是 $AA_1\to A_1D_1\to\cdots$，黑蚁爬行的路线是 $AB\to BB_1\to\cdots$，它们都遵循如下规则：所爬行的第 $i+2$ 段与第 i 段所在直线必须是异面直线(其中 i 是正自然数)．设黑、白二蚁走完第1990段后各停止在正方体的某个顶点处，这时黑、白二蚁的距离是 ( )

A. 1　　B. $\sqrt{2}$

C. $\sqrt{3}$　　D. 0

3. 在直角坐标平面内，称横、纵坐标均为整数的点为整点．设 n 为正整数，则图1-1所示的正方形 G_n 内(包括边界)整点的个数是 ( )

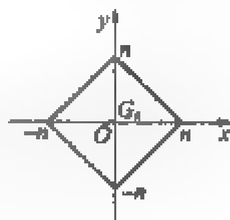


图1-1

A. $4n+1$　　B. $8n-3$

C. $2n^2+2n+1$　　D. n^2+2n+2

4. 给定100个实数 $a_1,a_2,\cdots,a_{100}$ 满足 $a_1\neq 0$，$a_1-3a_2+2a_3\geqslant 0$，$a_2-3a_3+2a_4\geqslant 0$，$\cdots$，$a_{99}-3a_{100}+2a_1\geqslant 0$，$a_{100}-3a_1+2a_2\geqslant 0$，则这100个数 ( )

A. 构成等差数列，也构成等比数列

B. 构成等差数列，不构成等比数列

C. 构成等比数列，不构成等差数列



D. 不构成等差数列,也不构成等比数列

5. 若 $R_n=\frac{1}{2}(a^n+b^n)$,其中 $a=3+2\sqrt{2}$,$b=3-2\sqrt{2}$,$n\in N^*$,则 R_{2009} 是一个整数,它的个位数是 ( )

A. 1　　B. 2　　C. 3　　D. 4

6. 在正整数数列中,由1开始依次按如下规则将某些数染成红色.先染1,再染2个偶数2,4;再染4后面最邻近的3个连续奇数5,7,9;再染9后面最邻近的4个连续偶数10,12,14,16;再染此后最邻近的5个连续奇数17,19,21,23,25.按此规则一直染下去,得到一红色子数列1,2,4,5,7,9,10,12,14,16,17,….则在这个红色子数列中,由1开始的第2007个数是 ( )

A. 3844　　B. 3951　　C. 3953　　D. 4014

7. (2008年上海市高考春季招生试题)已知 $a_1,a_2,\cdots,a_n$;$b_1,b_2,\cdots,b_n$(n是正整数),令 $L_1=b_1+b_2+\cdots+b_n$,$L_2=b_2+b_3+\cdots+b_n$,…,$L_n=b_n$.某人用图1-2分析得到恒等式:$a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n=a_1L_1+c_2L_2+c_3L_3+\cdots+c_kL_k+\cdots+c_nL_n$,则 $c_k=$________($2\leqslant k\leqslant n$).

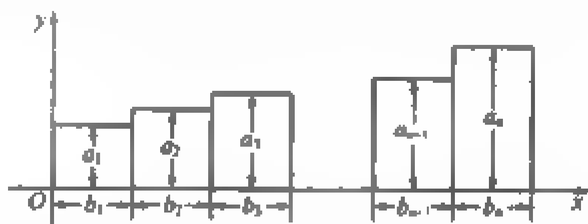


图1-2

8. 一同学在电脑中按 $a_1=1$,$a_n=a_{n-1}+1(n\geqslant2)$编制一个程序生成实心圆,并在每次生成后插入一个空心圆,当空心圆达到10个时进行第1次复制,然后将复制后所得的圆进行第2次复制,依次下去,则复制________次可使空心圆达到2008个以上.

9. 假定有一排蜂房,形状如图1-3所示,一只蜜蜂在左下角,由于受了点伤,只能爬,不能飞,而且只能永远向右方(包括右上、右下)爬行,从一间蜂房爬到与之相邻的右蜂房中去,求从最初位置爬到6号蜂房共有________种不同的爬法.

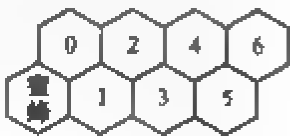


图1-3

10. 已知数列$\{a_n\}$的各项为1,2,3,4,5,8,7,…,它的一个通项公式为________.

11. (第15届"希望杯"高二竞赛题)某运动会开了n天($n>1$),共发出m枚奖牌.第



1 天发出 1 枚加上余下的$\frac{1}{7}$，第二天发出 2 枚加上余下的$\frac{1}{7}$；如此持续了$(n-1)$天，第 n 天发出 n 枚. 该运动会开了________天，共发了________枚奖牌.

12. (2007 年湖北数学奥林匹克夏令营竞赛试题)已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，$a_{n+3}\leqslant a_n+3$，$a_{n+2}\geqslant a_n+2$. 则 $a_{2007}=$________.

13. 已知 $f(x)$是定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$ 上的函数，满足 $f(1)=\frac{3}{2}$，且对任意 $x,y\in\mathbf{N}^*$，有 $f(x+y)=\left(1+\frac{y}{x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{x}{y+1}\right)f(y)+x^2y+xy+xy^2$. 求 $f(x)$.

14. 定义 $f^{(0)}(x)=x$，$f^{(1)}(x)=f(x)$，$f^{(n)}(x)=f[f^{(n-1)}(x)]$，$n\in\mathbf{N}^*$. 若 $f(x)$ 在其定义域上为增函数，$g(x)$ 为 $f(x)$ 的反函数，则方程 $f^{(n)}(x)=g^{(m)}(x)(n,m\in\mathbf{N}^*)$ 与方程 $f(x)=x$ 同解.

15. 两位学生 A、B 做如下游戏：A、B 分别在纸片上写下一个正整数 a、b，并将纸片交给学生 C，C 在黑板上写出两个正整数 x、y，其中一个为 $a+b$. 接着 C 问 A："你知道 b 吗?"若 A 回答不知道，C 就问 B："你知道 a 吗?"若 B 回答不知道，C 再问 A，…，如此下去，证明在有限次回答后，必有一个学生回答知道(假定 A、B 均非常聪明且是诚实的).



第2讲　递推数列

1　递推数列的定义

知识扫描

1. 递推数列的定义

(1) 递推数列：一个数列的连续若干项之间的关系叫递推关系，由递推关系所确定的数列叫递推数列．如：数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=3$，$a_{n+1}-a_n=2(n\in\mathbf{N}^*)$ 就是由递推关系 $a_{n+1}-a_n=2$ 和首项 $a_1=3$ 所确定的等差数列．

按照递推关系式的结构类型，递推数列可分为线性递推和非线性递推；按照相等与不等关系，递推数列可分为等量递推和不等量递推；在具体运用递推关系时，可按照下标由小到大或由大到小进行递推，故从递推方式方法上看，递推数列又可分为正向递推与反向递推．

解决递推数列问题的核心是求递推数列的通项公式．

形如 $a_1=a$，$a_{n+1}=a_n+g(n)$ 的递推数列，通常称为等差型数列．当 $g(n)=d$（常数）时，它就是等差数列．

等差型数列的通项公式可用累加法求出：

$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=\sum_{k=1}^{n-1}g(k)+a_1.$$



形如 $a_1=a, a_{n+1}=f(n)a_n$ 的递推数列，通常称为等比型数列，当 $f(n)=q$（非零常数），$a_1\neq 0$ 时，它就是等比数列.

等比型数列的通项公式可用累积法求出：当 $a_1\neq 0$ 时，

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_2}{a_1}\cdot a_1=f(n-1)f(n-2)\cdots f(1)a_1.$$

(2) k 阶递推数列：一个数列的第 n 项与前面的 k 项 $a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k}(k\in\mathbf{N}^*,k<n)$ 的关系 $a_n=f(a_{n-1},a_{n-2},\cdots,a_{n-k})$ 称为 k 阶递推关系. 由 k 阶递推关系及给定的前 k 项 a_1，$a_2,\cdots,a_k$（称为初始值）所确定的数列叫做 k 阶递推数列.

称二次方程 $x^2=c_1x+c_2$ 为具有递推关系 $a_n=c_1a_{n-1}+c_2a_{n-2}(n\geqslant 3)$ 的数列的特征方程. 设 x_1，x_2 是此特征方程的两根，则有以下结论：

① 当 $x_1\neq x_2$ 时，$a_n=\alpha_1x_1^n+\alpha_2x_2^n$；

② 当 $x_1=x_2$ 时，$a_n=(\beta_1+\beta_2n)x_1^n$.

一般地，称由初始值 $a_1,a_2,\cdots,a_k$ 及递推关系

$$a_{n+k}=c_1a_{n+k-1}+c_2a_{n+k-2}+\cdots+c_ka_n \tag{1}$$

所确定的数列 $\{a_n\}$ 为 k 阶常系数线性递推数列. 其特征方程为

$$x^k=c_1x^{k-1}+c_2x^{k-2}+\cdots+c_k, \tag{2}$$

方程的根称为 $\{a_n\}$ 的特征根，有以下 2 个结论：

① 若递推关系式(1)对应的特征方程(2)有 k 个不同的单根 x_1，x_2，$\cdots$，x_k，则

$$a_n=A_1x_1^n+A_2x_2^n+\cdots+A_kx_k^n,$$

其中 A_1，A_2，$\cdots$，A_k 是待定系数，由初始值确定.

② 若递推关系式(1)对应的特征方程(2)有不同的特征根 x_1，x_2，$\cdots$，$x_s(s<k)$，其中，$x_i(1\leqslant i\leqslant s)$ 是方程(2)的 t_i 重根，$t_1+t_2+\cdots+t_s=k$，则

$$a_n=A_1(n)x_1^n+A_2(n)x_2^n+\cdots+A_s(n)x_s^n,$$

其中，$A_i(n)=B_1^{(i)}+B_2^{(i)}n+\cdots+B_{t_i}^{(i)}n^{t_i-1}$，$i=1,2,\cdots,s$，这里的 $B_1^{(i)}$，$B_2^{(i)}$，$\cdots$，$B_{t_i}^{(i)}$ $(i=1,2,\cdots,s)$ 是待定系数，由初始值确定.

2. 递推数列的通项

对于由递推式确定数列通项公式的问题，通常可将递推式变换转化成等差型数列或等比型数列问题，也可通过联想构造或猜想证明转化问题.

常用的求通项方法有公式法、累加法、累积法、待定系数法、迭代法、对数变换法和数学归纳法等.

由于常数列是最简单的数列，因此"常数列化"也是一种重要的数学思想方法.



要注意等差数列和等比数列的各种递推表达形式.例如,等差数列的常见表达形式有 $a_{n+1}-a_n=C$(C为常数),$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$,$a_n=An+B$($A$、$B$为常数,$n\in \mathbf{N}^*$)等,等比数列的常见表达形式有 $a_{n+1}=qa_n$,$a_{n+1}^2=a_na_{n+2}$,$a_n=aq^n$($a,q\neq 0$,$a_n\neq 0$)等,这样才能在寻求熟悉的解题模式中产生合理的联想.



例题分析

例1 已知数列$\{a_n\}$满足

$$a_{n+1}=\frac{2n-1}{2n+3}a_n \quad (n=1,2,\cdots), \tag{1}$$

且 $a_1=\frac{1}{3}$,求通项公式 a_n.

解 在递推关系(1)中,从 $n=1,2,\cdots,n-1$ 进行列举,有

$$a_2=\frac{1}{5}a_1,$$

$$a_3=\frac{3}{7}a_2,$$

$$a_4=\frac{5}{9}a_3,$$

$$\cdots$$

$$a_{n-1}=\frac{2n-5}{2n-1}a_{n-2},$$

$$a_n=\frac{2n-3}{2n+1}a_{n-1},$$

$a_1=\frac{1}{3}$,各式相乘,并注意到得

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{7}\cdot\frac{5}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-5}{2n-1}\cdot\frac{2n-3}{2n+1}\cdot a_1 \\ &= \frac{1\cdot 3}{(2n-1)(2n+1)}\cdot\frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{4n^2-1} \quad (n=2,3,\cdots). \end{aligned} \tag{2}$$



显然，$a_1=\frac{1}{3}$ 也满足(2)式，所以

$$a_n=\frac{1}{4n^2-1}\quad(n=1,2,\cdots).$$

说明 例1的解法通常称为累积法．利用这一方法，可证明下列一般性结论：

若数列$\{a_n\}$满足$a_1=a$，$a_{n+1}=f(n)a_n(n=1,2,\cdots)$，则它的通项公式为

$$a_n=\begin{cases}a, & n=1,\\ a\prod\limits_{k=1}^{n-1}f(k), & n\geqslant 2.\end{cases}$$

累加法和累积法是由递推关系推求通项的两种基本方法，不少复杂问题常常要归结到这两种基本方法去求解．

妙解 将(1)式乘$(2n+1)$，变形可得$(2n+3)(2n+1)a_{n+1}=(2n+1)(2n-1)a_n$．

令$b_n=(2n+1)(2n-1)a_n$，则$b_{n+1}=(2n+3)(2n+1)a_{n+1}$，上式即$b_{n+1}=b_n$，可见$\{b_n\}$是常数列．于是，$b_n=b_1=3a_1=1$，故$(2n+1)(2n-1)a_n=1$，$a_n=\frac{1}{4n^2-1}$．

这里采用的是常数列化策略，过程非常简洁．

求数列通项公式在各类数学竞赛中既是一个重点，又是一个难点．成为难点的一个原因，就是求通项公式的方法灵活多样，分析、推理、综合等能力要求较高．

例2 (2007年全国高考理科卷Ⅱ第21题第1小题)设数列$\{a_n\}$的首项$a_1\in(0,1)$，$a_n=\frac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$，求$\{a_n\}$的通项公式．

分析1 用累加法．

方法1 将$a_{n+1}=pa_n+q$与$a_n=pa_{n-1}+q$相减，得$a_{n+1}-a_n=p(a_n-a_{n-1})$，从而得$\{a_{n+1}-a_n\}$是等比数列，再运用$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$，求出$a_n$．

解 由
$$\begin{cases}a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{3}{2},\\ a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{3}{2},\end{cases}\quad n=2,3,4,\cdots,$$

得
$$a_{n+1}-a_n=-\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1}).$$

所以，$\{a_n-a_{n-1}\}$是首项为$\frac{3}{2}(1-a_1)$，公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列．

所以
$$a_n-a_{n-1}=\frac{3}{2}(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}，$$



$$a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$$

$$=\frac{3}{2}(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\frac{3}{2}(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}+\cdots+\frac{3}{2}(1-a_1)+a_1$$

$$=\frac{3}{2}(1-a_1)\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}+a_1$$

$$=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

方法 2 将 $a_{n+1}=pa_n+q$ 变形，得 $\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\frac{q}{p}\cdot\frac{1}{p^n}$，从而通过 $\frac{a_n}{p^n}=\left(\frac{a_n}{p^n}-\frac{a_{n-1}}{p^{n-1}}\right)+\left(\frac{a_{n-1}}{p^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{p^{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{a_2}{p^2}-\frac{a_1}{p^1}\right)+\frac{a_1}{p^1}$，得 $\frac{a_n}{p^n}$，然后再求 a_n.

解 由 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{3}{2}$，得

$$\frac{a_n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\frac{a_{n-1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}+\frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}$$

所以
$$\frac{a_n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}-\frac{a_{n-1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}=-3\frac{1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}},n=2,3,4,\cdots,$$

于是
$$\frac{a_n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}=\left[\frac{a_n}{\left(-\frac{1}{2}\right)^n}-\frac{a_{n-1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}\right]+\left[\frac{a_{n-1}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}-\frac{a_{n-2}}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}}\right]$$

$$+\cdots+\left[\frac{a_2}{\left(-\frac{1}{2}\right)^2}-\frac{a_1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^1}\right]+\frac{a_1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=-3\cdot\frac{(-2)\left[1-(-2)^{n-1}\right]}{1-(-2)}+\frac{a_1}{\left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$=2+(-2)^n-2a_1$$

所以 $a_n=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

说明 累加法求解的过程采用了构造的方法，即通过构造特殊的数列(一般为等差

数列或等比数列），利用其通项求递推数列的通项.

分析 2　用待定系数法.

设 $a_{n+1}+a=p(a_n+a)$ 与 $a_{n+1}=pa_n+q$ 比较系数，得 $a=\frac{q}{p-1}$，从而可得 $\left\{a_n+\frac{q}{p-1}\right\}$ 是等比数列，再求出 a_n.

解　由 $a_n=\frac{3-a_{n-1}}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$，得 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{3}{2}$.

设 $a_n+a=-\frac{1}{2}(a_{n-1}+a)$，则 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{3}{2}a$，与 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{3}{2}$ 比较系数，得 $a=-1$. 所以 $a_n-1=-\frac{1}{2}(a_{n-1}-1)$.

故 $\{a_n-1\}$ 是首项为 a_1-1，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. 所以 $a_n-1=(a_1-1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $a_n=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

说明　待定系数法通常先设定通项的基本形式，再根据题设条件求出待定的系数.

分析 3　用迭代法.

直接利用 $a_n=p^{n-1}a_1+p^{n-2}q+p^{n-3}q+\cdots+p^2q+pq+q\ (n=2,3,4,\cdots)$ 求出 a_n.

解　因为　$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{3}{2}$，$n=2,3,4,\cdots$，

所以

$$\begin{aligned}
a_n&=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}a_{n-2}+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\\
&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2a_{n-2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\\
&=\cdots\\
&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\frac{3}{2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^2\frac{3}{2}+\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\\
&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1+\frac{3}{2}\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)+1\right]\\
&=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a_1+\frac{3}{2}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}\\
&=1-(1-a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}
\end{aligned}$$



说明 所谓迭代法,就是将递推式适当变形后,用下标较小的项代替某些下标较大的项,在一般项和初始项之间建立某种联系,从而求出通项.

分析 4 用不动点法.

由 $x = px + q(p \neq 1)$ 求得不动点 $x = \frac{q}{1-p}$,在 $a_{n+1} = pa_n + q$ 两边同减去 $\frac{q}{1-p}$,即可得 $\left\{a_n - \frac{q}{1-q}\right\}$ 是等比数列,从而求出 a_n.

解 因为 $a_n = -\frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{3}{2}$,$n = 2, 3, 4, \cdots$. 由 $x = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$,得 $x = 1$,所以 $\{a_n - 1\}$ 是首项为 $a_1 - 1$,公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列,故 $a_n - 1 = (a_1 - 1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即 $a_n = 1 - (1 - a_1)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

说明 用不动点法可求出一阶线性递推数列:$a_{n+1} = pa_n + q$($p \neq 1$,p,q 为常数)的通项的一般式.

令
$$b_n = a_n - x = a_n - \frac{q}{1-p},$$

得
$$b_{n+1} = a_{n+1} - x = pa_n + q - \frac{q}{1-p} = pa_n - \frac{pq}{1-p} = pb_n,$$

所以
$$b_n = b_1 p^{n-1},$$

故
$$\begin{aligned} a_n &= b_n + x = b_1 p^{n-1} + \frac{q}{1-p} \\ &= \left(a_1 - \frac{q}{1-p}\right) \cdot p^{n-1} + \frac{q}{1-p} \\ &= a_1 p^{n-1} + \frac{q(1-p^{n-1})}{1-p}. \end{aligned}$$

例 3 空间有 n 个平面,其中任何两个都不平行,任何三个都不经过同一直线,任何四个都不经过同一点. 问这 n 个平面将空间划分成多少个部分?

分析 这是一个平面划分空间的问题. 当 $n = 1, 2, 3$ 时,直观上容易确定其结果. 但当 $n \geqslant 4$ 时,直观想像就难以进行. 如果进行类似联想,我们不难记起下列关于直线划分平面的问题. 平面上有 n 条直线,其中任何两条不平行,任何三条不过同一点,则此 n 条直线把平面分成 $f(n) = \frac{1}{2}(n^2 + n + 2)$ 个部分.

下面利用递推法求解:设平面上已有 $n-1(n \geqslant 2)$ 条满足条件的直线,它把平面划分成 $f(n-1)$ 个部分. 如果再添上第 n 条直线(图 2-1 中的虚线),则它与前 $n-1$ 条直线都

相交，但不过它们的交点. 所以，第 n 条直线与前 $n-1$ 条直线有 $n-1$ 个交点. 这 $n-1$ 个交点把第 n 条直线分成 n 段，每段把它所在的原有平面部分划分为两块. 因此，这时平面块的总数增加了 n，即

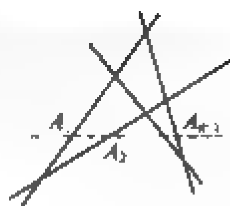


图 2-1

$$f(n)=f(n-1)+n \tag{1}$$

在(1)式中令 $n=2,3,\cdots,n$，有

$$f(2)=f(1)+2,$$

$$f(3)=f(2)+3,$$

$$\cdots$$

$$f(n)=f(n-1)+n.$$

各式相加，并注意到 $f(1)=2$，即得

$$f(n)=f(1)+2+3+\cdots+n=1+\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(n^2+n+2)\ (n\geqslant 2). \tag{2}$$

显然，当 $n=1$ 时，$f(1)=2$ 也满足(2)式. 因此，所设的 n 条直线把平面分成 $f(n)=\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 个部分.

将直线划分平面的解题思想和有关结论用于本题，原题就不难得解.

解 设空间里已有 $n-1(n\geqslant 2)$ 个满足条件的平面，它把空间分成 $f(n-1)$ 个部分. 若再添上第 n 个平面，则它与前 $n-1$ 个平面都相交，所得的 $n-1$ 条交线，其中任何两条不平行，任何三条不过同一点. 所以，第 n 个平面被 $n-1$ 条交线划分成 $\frac{1}{2}[(n-1)^2+(n-1)+2]=\frac{1}{2}(n^2-n+2)$ 个部分，每部分把它所在的原有空间区域划分成两个部分. 因此，这时空间部分的总数增加了 $\frac{1}{2}(n^2-n+2)$，即

$$f(n)=f(n-1)+\frac{1}{2}(n^2-n+2). \tag{3}$$

在(3)式中令 $n=2,3,\cdots,n$，有

$$f(2)=f(1)+\frac{1}{2}(2^2-2+2),$$

$$f(3)=f(2)+\frac{1}{2}(3^2-3+2),$$

…

$$f(n)=f(n-1)+\frac{1}{2}(n^2-n+2).$$

各式相加，并注意到 $f(1)=2$，即得

$$f(n)=f(1)+\frac{1}{2}\left[\sum_{k=2}^{n}k^2-\sum_{k=2}^{n}k+2(n-1)\right]$$

$$=1+\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2-\sum_{k=1}^{n}k+2n\right)$$

$$=1+\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)}{2}+2n\right]$$

$$=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)(n\geqslant 2). \tag{4}$$

显然，当 $n=1$ 时，$f(1)=2$ 也满足(4)式. 因此，题设的 n 个平面将空间划分成 $f(n)=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 个部分.

评析 例3在探索解题方法的过程中，就联想了直线划分平面这一已知命题的解题思想，又结合联想其结论，顺利地发现了解题方法.

在运用迭代方法求通项 a_n 时，应注意项数、每项的系数和次数以及最后一项. 当然，较强的计算能力也是用好迭代法的保证.

形如 $a_{n+1}=A\cdot a_n+f(n)$(其中常数 $A\neq 0$，$f(n)$ 为关于 n 的表达式)的通项公式：

若 $A=1$，则有

$$\left.\begin{aligned}&a_n=a_{n-1}+f(n-1),\\&a_{n-1}=a_{n-2}+f(n-2),\\&\cdots\\&a_3=a_2+f(2),\\&a_2=a_1+f(1).\end{aligned}\right\}\text{累加}$$

$\Rightarrow a_n=a_1+f(1)+f(2)+\cdots+f(n-1).$

若 $A\neq 1$，则有

$$\left.\begin{aligned}&a_n=Aa_{n-1}+f(n-1),\\&Aa_{n-1}=A^2a_{n-2}+f(n-2)A,\\&A^2a_{n-2}=A^3a_{n-3}+f(n-3)A^2,\\&\cdots\\&A^{n-3}a_3=A^{n-2}a_2+f(2)A^{n-3},\\&A^{n-2}a_2=A^{n-1}a_1+f(1)A^{n-2}.\end{aligned}\right\}\text{累加}$$



$\Rightarrow a_n = A^{n-1}a_1 + f(1)A^{n-2} + f(2)A^{n-3} + \cdots + f(n-2)A + f(n-1)$.

特别当 $f(n)$ 是关于 n 的一次式时，该式可通过错位相减法求其值。

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$，$a_1 = 2$，求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式.

解 $a_{n+1} = 2a_n + 3 \cdot 2^n$ 两边除以 2^{n+1}，得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + \frac{3}{2}$，则 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} - \frac{a_n}{2^n} = \frac{3}{2}$，故数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$ 为首项，以 $\frac{3}{2}$ 为公差的等差数列，由等差数列的通项公式，可得 $\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1)\frac{3}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\right)2^n$.

说明 形如 $a_{n+1} = pa_n + q \cdot t^n (t \neq 0)$ 的递推数列，可将关系式转化为

$$\frac{a_{n+1}}{t^{n+1}} = \frac{p}{t} \cdot \frac{a_n}{t^n} + \frac{q}{t} \text{ 或 } \frac{a_{n+1}}{t^n} = \frac{p}{t} \cdot \frac{a_n}{t^{n-1}} + q,$$

再求数列 $\left\{\frac{a_n}{t^n}\right\}$ 或 $\left\{\frac{a_n}{t^{n-1}}\right\}$ 的通项公式.

当 $p \neq t$ 时，也可用待定系数法，令 $a_{n+1} + xt^n = p(a_n + xt^{n-1})$，与原递推式相比，可得 $\frac{px}{t} - x = q$，解出 x 后再求通项.

例 5 （2006 年湖南省高中数学竞赛 A 卷试题） 将 m 位性别相同的客人，按如下方法入住 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 共 n 个房间. 首先，安排 1 位客人和余下客人的 $\frac{1}{7}$ 入住房间 A_1；然后，从余下客人中安排 2 位和再次余下客人的 $\frac{1}{7}$ 入住房间 A_2；以此类推，第几号房间就安排几位客人和余下客人的 $\frac{1}{7}$ 入住，这样，最后一间房间 A_n 正好安排最后余下的 n 位客人. 试求客人的数目和房间的数目，以及每间房间入住客人的数目.

解 设安排完第 k 号房间 A_k 后还剩下 a_k 位客人，则 $a_0 = m$，$a_{n-1} = n$.

因为第 k 号房间 A_k 入住的客人数为 $k + \frac{a_{k-1} - k}{7}$，所以 $a_{k-1} - a_k = k + \frac{a_{k-1} - k}{7}$，即 $a_k = \frac{6}{7}(a_{k-1} - k)$. 变形得：$a_k + 6k - 36 = \frac{6}{7}[a_{k-1} + 6(k-1) - 36]$

这表明数列 $b_k = a_k + 6k - 36$ 是等比数列，公比 $q = \frac{6}{7}$，其中，$b_0 = a_0 - 36 = m - 36$，$b_{n-1} = a_{n-1} + 6(n-1) - 36 = 7n - 42$.

代入通项公式得 $7n - 42 = (m-36)\left(\frac{6}{7}\right)^{n-1}$，即 $m = 36 + \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}$.

由于 m 为正整数，并且 7^n 与 6^{n-1} 互质，故 $6^{n-1} \mid (n-6)$.



但
$$0 \leqslant \left|\frac{n}{6}-\frac{6}{7}\right| < 1 \quad (n > 1),$$

解得 $n=6$，从而 $m=36$. 由此可知，房间 A_1 入住 $1+\frac{36-1}{7}=6$ 位客人；房间 A_2 入住 $2+\frac{30-2}{7}=6$ 位客人；房间 A_3 入住 $3+\frac{24-3}{7}=6$ 位客人；房间 A_4 入住 $4+\frac{18-4}{7}=6$ 位客人；房间 A_5 入住 $5+\frac{12-5}{7}=6$ 位客人；最后一房间住了剩下的 6 位客人.

综上可知，共有客人 36 人，房间 6 间，每间房间均入住 6 位客人.

说明 用递推法解答实际问题时，解题的关键是寻求递推关系，解题的难点常常是求解递归方程. 因此，从一定意义上说，熟练掌握寻求递归数列通项的方法，是用好递推法的核心问题.

例 6 (Fibonacci 数列) 1202 年，意大利比萨的数学家斐波那契(约 1170—约 1250)在他所著的《算盘书》里提出了这样一个有趣的问题：

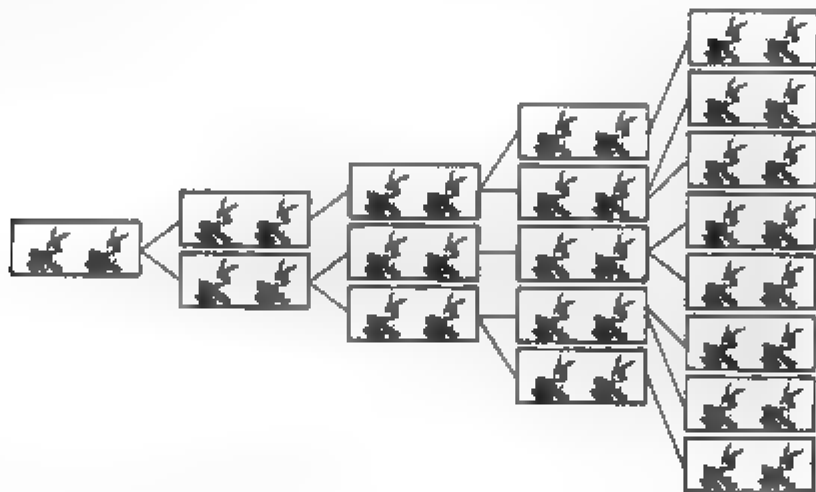


图 2-2

假定 1 对一雌一雄的大兔，每月能生一雌一雄的 1 对小兔，每对小兔过两个月就能长成大兔(如图 2-2 所示). 那么，若年初时有 1 对小兔，按上面的规律繁殖，并且不发生死亡等意外情况，1 年后将有多少对兔子？

分析 设原有的兔子对数为 a_0，第 n 个月后的兔子对数为 a_n.

已知原来有一对兔子，$a_0=1$；

1 个月后这一对小兔子长成一对大兔，但尚未生殖，因此 $a_1=1$；

2 个月后原来这对兔子生下第一对小兔，因此 $a_2=1+1=2$；



3 个月后原来这对兔子生下第二对小兔，因此 $a_3 = 1 + 2 = 3$；

4 个月后原来这对兔子生下第三对小兔，第一对小兔也开始生下一对小兔子，因此 $a_4 = 2 + 3 = 5$；…

现在来看第 n 个月后的兔子对数 a_n，它是在前一个月已有的兔子对数 a_{n-1} 的基础上增加新出生的小兔对数，而能够生小兔的兔子对数是两个月以前的兔对总数，包括原来的一对兔，也就是 a_{n-2}，因此，$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$。

这就是斐波那契问题的递推关系式，由 $a_0 = 1, a_1 = 1, a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ 递推得到的数列

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \cdots$$

称为斐波那契数列。

斐波那契问题的答案：$a_{12} = 233$ 对兔子。

评析 1 我们可以一般地求出斐波那契数列的通项公式。

解法 1 用待定系数法。

设 $a_{n+1} + \alpha a_n = k(a_n + \alpha a_{n-1})$，转化为

$$a_{n+1} = (k - \alpha)a_n + \alpha k a_{n-1},$$

又 $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} (n \geqslant 2)$

比较得 $\begin{cases} k - \alpha = 1, \\ k\alpha = 1, \end{cases}$ 所以有 $\alpha^2 + \alpha - 1 = 0$。

不妨设 $\alpha > 0$，解得 $\alpha = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$，$k = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$，于是

$$\begin{aligned} a_{n+1} + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a_n &= \frac{\sqrt{5} + 1}{2}\left(a_n + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a_{n-1}\right) \\ &= \cdots \\ &= \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{n-1}\left(a_2 + \frac{\sqrt{5} - 1}{2}a_1\right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{5} + 1}{2}\right)^{n}. \end{aligned}$$

所以
$$a_n = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}a_{n-1} + \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}. \tag{1}$$

再次用待定系数法，设 $a_n + \beta\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}\left[a_{n-1} + \beta\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$，化简得：

$a_n = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}a_{n-1} - \sqrt{5}\beta\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$，与(1)式比较得，$\beta = -\frac{\sqrt{5}}{5}$，



于是
$$a_n-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\left[a_{n-1}-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\right]$$
$$=\cdots$$
$$=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\left[a_1-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^1\right]$$
$$=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$
$$=-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

所以
$$a_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

解法 2 用特征根法.

斐波那契数列所对应的特征方程是 $x^2-x-1=0$,它的两个根是 $x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$,所以,设 $a_n=\alpha_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\alpha_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$,因为 $a_0=1$, $a_1=1$,

所以
$$a_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right].$$

评析 2 斐波那契数列有着深刻的内涵和广泛的应用.

扩展问题 1 从 1,2,3,…,2008,2009 中任意选取 k 个数,使得在所选的 k 个数中一定可以找到能构成一个三角形边长的三个数.试问满足上述条件的 k 的最小值是多少?并说明理由.

解 满足条件的 k 的最小值是 17.

(1) 从{1,2,3,…,2008,2009}中,按递推公式 $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ 选取{1,2,3,5,8,13,21,34,55,89,144,233,377,610,987,1597}共 16 个数.其中的任意三个数 a_i, a_j, $a_k(i<j<k)$,均有 $a_i<a_j<a_k$,且 $a_i+a_j\leqslant a_k$,故都不可能构成三角形.这表明,所选取的 16 个数中,不存在能构成三角形的三个数,所以 $k\geqslant 17$.

(2) 设 $a_1<a_2<a_3<\cdots<a_{17}$ 是从{1,2,…,2008,2009}中任意选取的某 17 个数.若 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{17}\}$ 不能找到构成三角形的三个数,即其中的任意三个数都不可能构成三角形,则有 $a_1\geqslant 1$, $a_2\geqslant 2$, $a_3\geqslant a_1+a_2\geqslant 3$, $a_4\geqslant a_2+a_3\geqslant 5$, $a_5\geqslant a_3+a_4\geqslant 8$,…, $a_{16}\geqslant a_{14}+a_{15}\geqslant 1597$, $a_{17}\geqslant a_{15}+a_{16}\geqslant 2584$.这与 $a_{17}\leqslant 2009$ 相矛盾.这表明从{1,2,3,…,2008,2009}中任意选取 17 个数,总可以找到某三个数,使其作为边长能够构造出



一个三角形，所以 k 的最小值是 17.

说明 满足 $0<a<b<c$ 的三个正数 a,b,c，能构成一个三角形的充要条件是 $a+b>c$.

本题巧用斐波那契数列：$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$，构造出不存在能构成一个三角形的三个数的集合，是解题的关键. 在讨论过程中利用了不等递推的思想.

扩展问题 2 一座楼房，从楼下到楼上共有 11 级阶梯. 若规定每一步只能跨上一级或者两级，问从楼下走到楼上，有几种不同的走法？

分析 记上到 n 级阶梯的走法有 a_n 种. 显然，上第 1 级阶梯只有一种走法，即 $a_1=1$；上第 2 级阶梯有两种走法，可以先上第一级，再上第二级，也可以一步直接登上第二级阶梯，即 $a_2=2$；上第 3 级阶梯有下列三种走法：$1+1+1$，$1+2$，$2+1$，即 $a_3=3$.

现在研究上第 n 级阶梯的走法种数 a_n 与 a_{n-1}，a_{n-2} 的关系.

考虑登上第 n 级阶梯的最后一步有两种走法，一种是从第 $n-1$ 级阶梯跨一级，另一种是从第 $n-2$ 级阶梯跨两级，而前一种走法有 a_{n-1} 种，另一种走法有 a_{n-2} 种，因此走上第 n 级阶梯的走法种数为 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$.

已知 $a_1=1$，$a_2=2$.

显然，这是缺了首项 $a_0=1$ 的斐波那契数列. 通过递推式可算得 $a_{11}=144$.

扩展问题 3 若 $\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin^{2007}\alpha+\cos^{2007}\alpha=$ ________.

解 由 $\sin\alpha+\cos\alpha=t$，求 $\sin^n\alpha+\cos^n\alpha(n\in\mathbf{N}^*)$ 的问题一般可采用递推的方法求解.

令 $u_n=\sin^n\alpha+\cos^n\alpha$，则 $u_{n+1}=\sin^{n+1}\alpha+\cos^{n+1}\alpha=tu_n+\dfrac{1-t^2}{2}u_{n-1}$.

将 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ 代入，得 $u_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}u_n+\dfrac{1}{3}u_{n-1}$，即 $(\sqrt{3})^{n+1}u_{n+1}=(\sqrt{3})^n u_n+(\sqrt{3})^{n-1}u_{n-1}$.

问题化归于数列 $\{(\sqrt{3})^n u_n\}$ 通项的求解，而 $\{(\sqrt{3})^n u_n\}$ 就是缺项的斐波那契数列. 下略.

扩展问题 4 已知以 AB 为直径的半圆有一个内接正方形 $CDEF$，其边长为 1(见图 2－3).

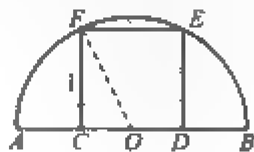


图 2－3

设 $AC=a$，$BC=b$，作数列

$$u_1=a-b,$$

$$u_2=a^2-ab+b^2,$$

$$u_3=a^3-a^2b+ab^2-b^3,$$

$$\cdots$$

$$u_k=a^k-a^{k-1}b+a^{k-2}b^2-\cdots+(-1)^k b^k.$$

则 $$u_n = u_{n-1} + u_{n-2}(n \geqslant 3).$$

证明 要证原式成立，只需证明 $\Delta = u_n - u_{n-1} - u_{n-2} = 0$ 即可.

令 $\Delta = u_n - u_{n-1} - u_{n-2}$，则

$$\begin{aligned}\Delta &= u_{n-2}(a^2 - a - 1) + (-1)^{n-1}ab^{n-1} + (-1)^n b^n - (-1)^{n-1}b^{n-1} \\ &= u_{n-2}(a^2 - a - 1) + (-1)^{n-1}b^{n-1}(a - b - 1).\end{aligned}$$

因为 $CDEF$ 为半圆的内接正方形，边长为 1，

所以 $$AO = FO = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2},$$

故 $$AC = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, BC = \frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

即 $$a = \frac{\sqrt{5}+1}{2}, b = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

所以 $$a^2 - a - 1 = \left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = \frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2} - 1 = 0,$$

$$a - b - 1 = \frac{\sqrt{5}+1}{2} - \frac{\sqrt{5}-1}{2} - 1 = 0.$$

故 $\Delta = 0$，即 $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$.

实际上我们也解决了如下问题：

（2007 年安徽省高中数学竞赛初赛试题）在直角 $\triangle ABC$ 中，$\angle C = 90°$，CD 为斜边上的高，D 为垂足. $AD = a$，$BD = b$，$CD = a - b = 1$. 设数列 $\{u_k\}$ 的通项为 $u_k = a^k - a^{k-1}b + a^{k-2}b^2 - \cdots + (-1)^k b^k$，$k = 1, 2, 3, \cdots$，则 （　　）

A. $u_{2008} = u_{2007} + u_{2006}$ B. $u_{2008} = u_{2007} - u_{2006}$

C. $2007u_{2008} = 2008u_{2007}$ D. $2008u_{2008} = 2007u_{2007}$

答案 A.

例 7 （2006 年全国高中数学联合竞赛（天津市初赛）试题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = p$，$a_2 = p + 1$，$a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n - 20$，其中 p 是给定的实数，n 是正整数，试求 n 的值，使得 a_n 的值最小.

解 令 $b_n = a_{n+1} - a_n$，$n = 1, 2, \cdots$，

由题设 $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = n - 20$，有 $b_{n+1} - b_n = n - 20$，且 $b_1 = 1$，

于是 $$\sum_{i=1}^{n-1}(b_{i+1} - b_i) = \sum_{i=1}^{n-1}(i - 20),$$



即 $$b_n-b_1=[1+2+\cdots+(n-1)]-20(n-1).$$

所以 $$b_n=\frac{(n-1)(n-40)}{2}+1. \qquad (1)$$

又 $a_1=p$，$a_2=p+1$，则 $a_3=2a_2-a_1+1-20=p-17<a_1<a_2$.

所以，当 a_n 的值最小时，应有 $n\geqslant 3$，$a_n\leqslant a_{n+1}$，且 $a_n\leqslant a_{n-1}$，即 $b_n=a_{n+1}-a_n\geqslant 0$，$b_{n-1}=a_n-a_{n-1}\leqslant 0$.

由(1)式得 $\begin{cases}(n-1)(n-40)\geqslant -2,\\(n-2)(n-41)\leqslant -2.\end{cases}$

由于 $n\geqslant 3$，且 $n\in\mathbf{N}^*$，解得 $\begin{cases}n\geqslant 40,\\n\leqslant 40.\end{cases}$ 所以，当 $n=40$ 时，a_{40} 的值最小.

说明 $a_{n+2}=pa_{n+1}+qa_n$ 可以变形为 $a_{n+2}-\alpha a_{n+1}=\beta(a_{n+1}-\alpha a_n)$，即 $a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n$，则可从 $\alpha+\beta=p$，$\alpha\cdot\beta=-q$，解得 α，β，于是，$\{a_{n+1}-\alpha a_n\}$ 是公比为 β 的等比数列，这样就转化成一阶的递推数列.

若数列 $\{a_n\}$ 满足递推式 $a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}+f(n)$ $(n=2,3,\cdots)$，且 $a_1=a$，$a_2=b$（a，b 为常数），则可变形为 $a_{n+1}-\alpha a_n=\beta(a_n-\alpha a_{n-1})+f(n)$，

或 $$a_{n+1}-\beta a_n=\alpha(a_n-\beta a_{n-1})+f(n).$$

令 $x_n=a_{n+1}-\alpha a_n$（或 $a_{n+1}-\beta a_n=x_n$），则 $x_n=\beta x_{n-1}+f(n)$（或 $x_n=\alpha x_{n-1}+f(n)$）．其中 α，β 为方程 $x^2-px+q=0$ 的两个根，当 $\alpha=\beta$ 时，又要对 $f(n)$ 分类，即对 $f(n)$ 又可以分 $f(n)=m\alpha^n$ 和 $f(n)\neq m\alpha^n$ 两种情况讨论.

例8 设 $\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^2-2c$，$\varphi_m(x)=x\varphi_{m-1}(x)-c\varphi_{m-2}(x)$（$m\in\mathbf{N}$，且 $m>2$），其中 c 为常数．显然，$\varphi_m(x)$（$m\in\mathbf{N}^*$）是关于 x 的一个 m 次多项式．证明它具有美妙的性质：若 α，β 为常数，且 $\alpha\beta=c$，则 $\varphi_m(\alpha+\beta)=\alpha^m+\beta^m$.

证明 (1) 当 $m=1$ 时，有 $\varphi_1(\alpha+\beta)=\alpha+\beta$，结论成立．当 $m=2$ 时，有 $\varphi_2(\alpha+\beta)=(\alpha+\beta)^2-2c=\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta-2c=\alpha^2+\beta^2$，结论成立.

(2) 假设当 $m\leqslant k$（$k\in\mathbf{N}$，且 $k\geqslant 2$）时，有 $\varphi_m(\alpha+\beta)=\alpha^m+\beta^m$，则

$$\begin{aligned}\varphi_{k+1}(\alpha+\beta)&=(\alpha+\beta)\varphi_k(\alpha+\beta)-c\varphi_{k-1}(\alpha+\beta)\\&=(\alpha+\beta)(\alpha^k+\beta^k)-c(\alpha^{k-1}+\beta^{k-1})\\&=\alpha^{k+1}+\beta^{k+1}\end{aligned}$$

结论当 $m=k+1$ 时也成立.

所以 $\varphi_m(\alpha+\beta)=\alpha^m+\beta^m$ $(m\in\mathbf{N})$ 成立.

说明 若 $c=0$ 或 $c=\cos 2j\pi/(m-1)+i\sin 2j\pi/(m-1)$ $(j=0,1,2,\cdots,m-2)$，

a,b,x_1 为常数，且 $a\neq 0$，α,β 为 $t^2-(ax_1+b)t+c=0$ 的两个根，则由 x_1 及递推式

$$x_{n+1}=\frac{1}{a}[\varphi_m(ax_n+b)-b]$$

确定的递归数列 $\{x_n\}$ 的通项公式为 $x_n=\frac{1}{a}(\alpha^{m^{n-1}}+\beta^{m^{n-1}}-b)$

证明 (1) 由 $\alpha+\beta=ax_1+b$ 得 $x_1=\frac{1}{a}(\alpha^{m^{1-1}}+\beta^{m^{1-1}}-b)$，结论当 $n=1$ 时成立.

(2) 假设结论当 $n=k$ 时成立，则

$$x_{k+1}=\frac{1}{a}[\varphi_m(ax_k+b)-b]=\frac{1}{a}[\varphi_m(\alpha^{m^{k-1}}+\beta^{m^{k-1}})-b]$$

由条件易知 $\alpha^{m^{k-1}}\cdot\beta^{m^{k-1}}=c^{m^{k-1}}=c.$

根据性质得 $\varphi_m(\alpha^{m^{k-1}}+\beta^{m^{k-1}})=(\alpha^{m^{k-1}})^m+(\beta^{m^{k-1}})^m=\alpha^{m^k}+\beta^{m^k}.$

所以 $x_{k+1}=\frac{1}{a}(\alpha^{m^k}+\beta^{m^k}-b)$，结论当 $n=k+1$ 时也成立.

所以 $x_n=\frac{1}{a}(\alpha^{m^{n-1}}+\beta^{m^{n-1}}-b)(n\in\mathbf{N}^*)$ 成立.

特例 已知数列 $\{x_n\}$：$x_1=\frac{3}{2}$，$x_{n+1}=8x_n^4+16x_n^3+4x_n^2-4x_n-1$，求其通项.

解 当 $c=1$ 时，$\varphi_4(x)=x^4-4x^2+2.$

因为 $8x_n^4+16x_n^3+4x_n^2-4x_n-1=\frac{1}{2}[(2x_n+1)^4-4(2x_n+1)^2+2-1].$

所以

$$x_{n+1}=\frac{1}{2}[\varphi_4(2x_n+1)-1].$$

又因方程 $t^2-\left(2\cdot\frac{3}{2}+1\right)t+1=0$ 的两个根为 $2+\sqrt{3}$，$2-\sqrt{3}$，

故通项为

$$x_n=\frac{1}{2}[(2+\sqrt{3})^{4^{n-1}}+(2-\sqrt{3})^{4^{n-1}}-1].$$

例 9 （2003 年克罗地亚数学竞赛题）实数数列 $\{a_n\}$ 满足关系式 $a_{m+n}+a_{m-n}=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2n})$，其中 $m\geqslant n\geqslant 0$. 若 $a_1=1$，求 a_{2003}.

解 令 $m=n$，得 $a_{2m}+a_0=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_{2m})$，所以 $a_0=0$.

令 $n=0$，得 $a_m+a_m=\frac{1}{2}(a_{2m}+a_0)$，即

$$a_{2m}=4a_m. \tag{1}$$



令 $m=n+2$，得

$$a_{2n+2}+a_2=\frac{1}{2}(a_{2n+4}+a_{2n}).\tag{2}$$

由(1)得 $a_{2n+2}=4a_{n+1}, a_2=4a_1=4.$

所以

$$a_{2n+2}+a_2=4a_{n+1}+4a_1=4(a_{n+1}+1).\tag{3}$$

又由(1)和(2)得

$$a_{2n+2}+a_2=\frac{1}{2}(4a_{n+2}+4a_n)=2a_{n+2}+2a_n.\tag{4}$$

结合(3)和(4)得 $a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n+2, a_0=1, a_1=1.$

因为 $a_2=4, a_3=9, a_4=16$，猜测 $a_n=n^2$.

下面用数学归纳法证明这一猜测.

对于 $n=0$ 和 $n=1$，猜测显然成立．假定 $a_n=n^2, a_{n+1}=(n+1)^2$，则有

$$a_{n+2}=2(n+1)^2-n^2+2=n^2+4n+4=(n+2)^2.$$

所以猜测也成立．即 $a_n=n^2, n\in \mathbf{N}$．所以 $a_{2003}=2003^2$.

评注 本题虽然没有设元和求初始值这两个步骤，但实质仍然是在寻找建立 a_{n+2} 与 a_{n+1}, a_n 之间的递推关系式.

建立递推关系后，有时也可以不求出它的通项公式，而是利用"归纳—猜测—证明"这一方法进行求解.

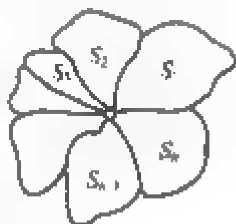


图 2-4

例 10 （着色问题）地图上某一地区有 n 个国家相邻，但 n 个国家只有一个公共点（见图 2-4）．现用红、黄、绿三种颜色给地图染色，但不许相邻的国家有相同的颜色，问共有多少种染法？

解 设共有 a_n 种染法.

对第 1 个国家 S_1 共有 3 种染法（可涂红、黄或绿），则涂去 S_1 后，对第 2 个国家 S_2 只有 2 种染法（S_1 染色后，对 S_2 只有两种颜色可选择了）．同理，对 S_3 有 2 种染法，对 $S_4, S_5, \cdots, S_n$ 每个国家都有 2 种染法．所以共有 $3\times 2^{n-1}$ 种染法．而在对 S_n 染色时，是以 S_{n-1} 为参照的，它有 2 种染法，这 2 种颜色可能与 S_1 不同色，也可能与 S_1 同色，而 S_n 与 S_1 同色的情况必须排除．但 S_n 与 S_1 同色的情形有多少种呢？事实上只要把 S_n 与 S_1 的交界线拆除就成为同一块了，这时就是 $(n-1)$ 块不同的染法，即 a_{n-1} 种．所以，$a_n=3\cdot 2^{n-1}-a_{n-1}$，即 $a_n-2^n=-(a_{n-1}-2^{n-1})$.

又因为 $a_2=6$，所以 $a_n-2^n=(-1)^{n-2}(a_2-2^2)=2\cdot(-1)^{n-2}(n\geqslant 2)$.

故

$$a_n=2^n+2(-1)^{n-2}.$$

说明 本例问题可推广为如下更一般的地图着色问题：平面上有一点 P，它是 n 个区域 $D_1, D_2, \cdots, D_n$ 的共同交界点（见图2-5），现取 k 种颜色对这 n 个区域进行着色，要求相邻两个区域的颜色不同，试求着色的方案数。

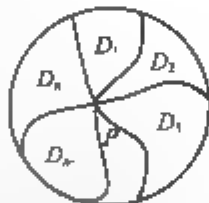


图2-5

解 设这 n 个区域的着色方案数为 u_n。当 $n=2$ 时，D_1 有 k 种着色方案，D_2 则有 $k-1$ 种，于是 $u_2=k(k-1)$；当 $n=3$ 时，D_1 有 k 种着色方案，D_2 有 $k-1$ 种，则 D_3 有 $k-2$ 种，故 $u_3=k(k-1)(k-2)$。当 $n \geqslant 4$ 时，无非有两种情况：D_1 和 D_{n-1} 有相同的颜色；D_1 和 D_{n-1} 所着颜色不同。第一种情形，D_n 区域有 $k-1$ 种颜色可用，即 D_1, D_{n-1} 区域所用颜色除外；而且从 D_1 到 D_{n-2} 的着色方案，和 $n-2$ 个区域的着色方案一一对应。后一种 D_n 区域有 $k-2$ 种颜色可供使用，而且从 D_1 到 D_{n-1} 的每一个着色方案和 $n-1$ 个区域的着色方案一一对应。所以，$u_n=(k-2)u_{n-1}+(k-1)u_{n-2}\ (n \geqslant 4)$。

令 $u(x)=\sum\limits_{n=2}^{\infty} u_n x^n$ 为 $\{u_n\}$ 的母函数，则有

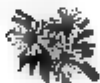
$$
\begin{aligned}
u(x) &= u_2x^2+u_3x^3+\sum_{n=4}^{\infty}\left[(k-2)u_{n-1}+(k-1)u_{n-2}\right]x^n \\
&= u_2x^2+(k-2)u_2x^3+(k-2)x\sum_{n=4}^{\infty}u_{n-1}x^{n-1}+(k-1)x^2\sum_{n=4}^{\infty}u_{n-2}x^{n-2} \\
&= u_2x^2+(k-2)x\sum_{n=2}^{\infty}u_nx^n+(k-1)x^2\sum_{n=2}^{\infty}u_nx^n \\
&= k(k-1)x^2+(k-2)x\cdot u(x)+(k-1)x^2u(x).
\end{aligned}
$$

解得
$$u(x)=\frac{k(k-1)x^2}{1-(k-2)x-(k-1)x^2}.$$

由于方程 $1-(k-2)x-(k-1)x^2=0$ 的两个根为 $\alpha=\frac{1}{k-1}$，$\beta=-1$，

那么
$$
\begin{aligned}
u(x) &= \frac{k(k-1)x^2}{[1-(k-1)x]\cdot(1+x)}=\frac{(k-1)x^2}{1+x}+\frac{(k-1)^2x^2}{1-(k-1)x} \\
&= (k-1)x^2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^nx^n+(k-1)^2x^2\sum_{n=0}^{\infty}(k-1)^nx^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(k-1)(-1)^{n+2}x^{n+2}+\sum_{n=0}^{\infty}(k-1)^{n+2}x^{n+2} \\
&= \sum_{n=2}^{\infty}\left[(-1)^n(k-1)+(k-1)^n\right]x^n.
\end{aligned}
$$

所以，$a_n=(-1)^n(k-1)+(k-1)^n$，$n=2,3,\cdots$.



能力训练

1. 若数列满足 $a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+2n$，则 a_{100} 等于 （　　）

A. 9900　　B. 9902　　C. 9904　　D. 10100

2. 定义一种运算“$*$”，对自然数 n 满足以下等式：① $1*1=1$；② $(n+1)*1=3(n*1)$，则 $n*1=$ （　　）

A. 3^n　　B. 3^{n-1}　　C. $\frac{3^n-1}{2}$　　D. $\frac{3^{n-1}-1}{2}$

3. 平面上有 n 个圆，其中每两个都相交于两点，每三个圆无公共点，它们将平面分成 $f(n)$ 块区域，如 $f(1)=2$，$f(2)=4$ 等，则 $f(n)$ 的表达式为 （　　）

A. 2^n　　B. n^2-n+2

C. $2^n-(n-1)(n-2)(n-3)$　　D. $n^3-5n^2+10n-4$

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3a_{n+1}-2a_n$，则 a_{1000} 的值为 （　　）

A. 2^{999}　　B. $2^{999}+1$　　C. 2^{1000}　　D. $2^{1000}-1$

5. 在数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $a_n=\log_n(n+1)$，$n\in\mathbf{N}^*$，设 $\sum\limits_{n=1}^{1023}\frac{1}{\log_{a_n}100}=\frac{q}{p}$，其中 p，q 为正整数，且 $(p,q)=1$，则 $p+q$ 的值为 （　　）

A. 2007　　B. 2006　　C. 1023　　D. 3

6. （可持续发展问题）某林场原有森林木材存量为 a，若木材以每年 25% 的增长率增长，而每年冬天需要砍伐的木材量为 x，为了实现 20 年后木材存有量至少翻两番的目标，则 x 的最大值为（lg2 取 0.3） （　　）

A. $\frac{49}{196}a$　　B. $\frac{8}{33}a$　　C. $\frac{121}{496}a$　　D. $\frac{377}{1568}a$

7. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=\frac{1}{2}$，$a_2=\frac{1}{3}$，且当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，有 $a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=0$，则 $a_{100}=$ ________

8. （2004 年全国高中数学联合竞赛（四川省初赛）试题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$，$a_n=2a_{n-1}+n-2(n\geqslant2)$，则通项 $a_n=$ ________.

9. （2006 年广东省高考理科卷第 14 题）　在德国布莱梅举行的第 48 届世乒赛期间，某商场橱窗里用同样的乒乓球堆成若干堆“正三棱锥”形的展品，其中第 1 堆只有一层，就 1 个乒乓球；第 2，3，4，…堆的最底层（第一层）分别按图 2-6 所示方式固定摆放.



从第1层开始，每层的小球自然垒放在下一层之上，第 n 堆第 n 层就放1个乒乓球，以 $f(n)$ 表示第 n 堆的乒乓球总数，则 $f(3)=$ ______；$f(n)=$ ______（答案用 n 表示）。



图 2-6

10. （2004年上海市高考春季招生第8题）根据图2-7的5个图形及相应点的个数的变化规律，试猜测第 n 个图中有______个点。



图 2-7

11. （第11届"希望杯"高二竞赛题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_{n+1}=(-1)^{n+1}n-2a_n$，$n\geqslant 1$，并且 $a_1=a_{2001}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=$ ______。

12. （2007年江西省高考理科卷第14题）已知数列 $\{a_n\}$ 对于任意 $p,q\in \mathbf{N}^*$ 都有 $a_p+a_q=a_{p+q}$，若 $a_1=\dfrac{1}{9}$，则 $a_{36}=$ ______。

13 求满足下列条件的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式：

(1) $a_1=6$，$a_{n+1}=2a_n+3\cdot 5^n$；

(2) $a_1=\dfrac{8}{9}$，$a_{n+1}=a_n+\dfrac{8(n+1)}{(2n+1)^2(2n+3)^2}$；

(3) $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-\dfrac{2}{3}a_{n+1}+\dfrac{1}{3}a_n=0$。

14 在一块木板上，插有甲、乙、丙三根针，已知其中的一根针上，由小到大放着 n 片大小不同的圆薄片，最大的一片在最底下；其他两根针上没有放圆薄片．现在要将这 n 片圆薄片从一根针上移动到另一根针上，且移动时须遵守下列规则：一次只能移动一片；小片始终应在大片的上面．问完成这个任务至少要移动多少次？

15 某省电视台某天有 n 次插播广告时刻，一共播了 m 条广告．第1次播了1条以及余下的 $(m-1)$ 条的 $\dfrac{1}{8}$，第2次播了两条以及余下的 $\dfrac{1}{8}$，以后每次按此规律插播广告，在最



后一次即第 n 次播了余下的最后几条广告($n>1$)．问这天有几次插播广告时刻？并求广告的条数 m．

16．(2003 年匈牙利数学奥林匹克试题)将一个 2003 边形的每个顶点染为红、蓝、绿三种颜色之一，使得相邻顶点的颜色互不相同．问有多少种满足条件的染法？

17．(2007 年辽宁省沈阳市高中三年级数学竞赛试题)已知数列 $\{a_n\}$ 中 $a_1=1$，关于 x 的方程 $x^2-a_{n+1}\sin(\cos x)+(2a_n+1)\sin 1=0$ 有唯一解．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 设 $b_n=na_n$，求数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(3) 设 $c_n=\left[1+\dfrac{1}{\log_2(a_n+1)}\right]^n$，求证：$c_n<3$．

18．上楼问题：某楼梯有 n 级台阶，某人一步最多迈 3 级，问有多少种不同的上楼方式？



2 变系数递推数列

知识扫描

递推关系式中，若 $a_{n-1}, a_{n+1}, a_n, \cdots$ 的系数中含有变量 n，则此数列 $\{a_n\}$ 称为变系数递推数列.

1. 一阶变系数线性递推数列

满足递推关系式 $$a_{n+1} = f(n)a_n + g(n), f(n) \neq 0 \tag{1}$$
的数列称为一阶变系数线性递推数列，它的通项公式为：

$$a_n = \prod_{k=1}^{n-1} f(k)\left[a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{\prod_{i=1}^{k} f(i)}\right] (n \geqslant 2). \tag{2}$$

方法1 用数学归纳法.

$$a_2 = f(1)a_1 + g(1) = f(1)\left[a_1 + \frac{g(1)}{f(1)}\right],$$

$$\begin{aligned} a_3 &= f(2)a_2 + g(2) \\ &= f(2)f(1)\left[a_1 + \frac{g(1)}{f(1)}\right] + g(2) \\ &= f(2)f(1)\left[a_1 + \frac{g(1)}{f(1)} + \frac{g(2)}{f(2)f(1)}\right] \end{aligned}$$

设 当 $k = n$ 时，有 $a_n = \prod_{k=1}^{n-1} f(k)\left[a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{\prod_{i=1}^{k} f(i)}\right]$.

则 当 $k = n + 1$ 时，



$$
\begin{aligned}
a_{n+1} &= f(n)a_n + g(n) \\
&= f(n)\prod_{k=1}^{n-1} f(k) + \left[a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{\prod_{i=1}^{k} f(i)}\right] + g(n) \\
&= \prod_{k=1}^{n} f(k) + \left[a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{\prod_{i=1}^{k} f(i)} + \frac{g(n)}{\prod_{k=1}^{n} f(k)}\right] \\
&= \prod_{k=1}^{n} f(k) + \left[a_1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{g(k)}{\prod_{i=1}^{k} f(i)}\right]
\end{aligned}
$$

从而由归纳原理可知，递推关系式 $a_{n+1} = f(n)a_n + g(n)$，$f(n) \neq 0$ 的通项公式为(1)式.

方法 2 用同一法.

先证式(2)确定的$\{a_n\}$满足题给递推关系式(1).

$$
\begin{aligned}
f(n)a_n + g(n) &= f(n)\left[c + \sum_{m=1}^{n-1} \frac{g(m)}{\prod_{i=1}^{m} f(i)}\right]\prod_{i=1}^{n-1} f(i) + g(n) \\
&= \left[c + \sum_{m=1}^{n} \frac{g(m)}{\prod_{i=1}^{m} f(i)}\right]\prod_{i=1}^{n} f(i) = a_{n+1},
\end{aligned}
$$

即$\{a_n\}$满足式(1).

设$\{b_n\}$也满足式(1)，即 $b_{n+1} = f(n)b_n + g(n)$，

从而有 $$a_{n+1} - b_{n+1} = f(n)(a_n - b_n).$$

令 $a_n - b_n = c_n$，即有 $c_{n+1} = f(n)c_n$，$c_{n+1} = \left[\prod_{i=1}^{n} f(i)\right]c_1$，其中，$c_1$ 为任意常数.

故可得 $$b_{n+1} = a_{n+1} - c_{n+1} = \left[c - c_1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{g(m)}{\prod_{i=1}^{m} f(i)}\right]\prod_{i=1}^{n} f(i).$$

上式中等号右边具有式(2)中等号右边的形式，从而可知，式(2)为式(1)的通解.

说明 同一法和数学归纳法需要先猜出通项公式再证明.

方法 3 用辅助函数法.

引入辅助函数 $k(n)$(待定)使得 $a_{n+1} - k(n+1) = f(n)[a_n - k(n)]$，则数列

$a_n-k(n)\}$ 为一阶变系数线性递推数列. 为定出 $k(n)$,规定 $k(1)=0$,将所构造递推式与原递推式比较,有

$$\begin{cases}k(2)-k(1)f(1)=g(1),\\ k(3)-k(2)f(2)=g(2),\\ \cdots\\ k(n)-k(n-1)f(n-1)=g(n-1).\end{cases}$$

求得 $$k(n)=\prod_{k=1}^{n-1}f(k)\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g(k)}{\prod\limits_{j=1}^{k}f(j)}\quad(n\geqslant 2).$$

故此类型数列的通项公式: $$a_n=\prod_{k=1}^{n-1}f(k)\left\{a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{g(k)}{\prod\limits_{j=1}^{k}f(j)}\right\}.$$

方法4 用辅助函数法.

设辅助数列 $\{h_n\}$,使 $f(n)=\frac{h_n}{h_{n+1}}$,则 $a_{n+1}=\frac{h_n}{h_{n+1}}a_n+g(n)$,两边同乘以 h_{n+1} 得 $a_{n+1}h_{n+1}=a_nh_n+g(n)h_{n+1}$,令 $b_n=a_nh_n$,则 $b_{n+1}=b_n+g(n)h_{n+1}$,用累加法可求出 $b_n=b_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[g(k)h_{k+1}]$,进而即可求出通项 a_n.

注 用累积法可求得 $h_{n+1}=\frac{h_1}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$,其中 h_1 可适当选取.

证法3与证法4采用的是一般性解法,即通过构造辅助数列,用累加法求其通项 a_n. 下面再给出两种一般性解法.

方法5 用迭代法

$$\begin{aligned}a_n&=f(n-1)a_{n-1}+g(n-1)\\&=f(n-1)[f(n-2)a_{n-2}+g(n-2)]+g(n-1)\\&=f(n-1)f(n-2)[f(n-3)a_{n-3}+g(n-3)]+f(n-1)g(n-2)+g(n-1)\\&=\cdots\\&=\prod_{k=1}^{n-1}f(k)a_1+\sum_{k=1}^{n-1}g(k)\prod_{j=k+1}^{n-1}f(j).\end{aligned}$$

它与(2)式是一样的.

方法6 由于 $f(n)\neq 0$,(1)式给出的递推式两边同时除以 $f(1)f(2)\cdots f(n)$,得

$$\frac{a_{n+1}}{f(1)f(2)\cdots f(n)}=\frac{a_n}{f(1)f(2)\cdots f(n-1)}+\frac{g(n)}{f(1)f(2)\cdots f(n)}.$$



令 $$b_1 = a_1, b_n = \frac{a_n}{f(1)f(2)\cdots f(n-1)} \ (n \geqslant 2),$$

得 $$b_{n+1} = b_n + \frac{g(n)}{f(1)f(2)\cdots f(n)}.$$

从而 $$b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1) + b_1 = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{f(1)\cdots f(k)} + a_1,$$

所以，当 $n \geqslant 2$ 时，$a_n = f(1)f(2)\cdots f(n-1)b_n = \prod_{i=1}^{n-1} f(i)\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{f(1)\cdots f(k)} + a_1\right]$

实际上，至此已证得了(2)式.

说明　若 p 为非零实常数，则由递推式 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_{n+1} = pa_n + g(n) \end{cases}$ 给出的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是

$$a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1, \\ p^{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n-1} \frac{g(k)}{p^k} + a_1\right], & n \geqslant 2. \end{cases}$$

只要在式(1)、式(2)中令 $f(n) = p$ 即可得到.

递推数列 $\{a_n\}$：$a_1 > 0$，$a_{n+1} = g(n)a_n^{f(n)}$，(其中 $g(n) > 0$，$n \in \mathbf{N}^*$). 通过取对数化为 $\lg a_{n+1} = f(n)\lg a_n + \lg g(n)$. 数列 $\{\lg a_n\}$ 为一阶变系数线性递推数列，应用(2)式可得到其通项公式为

$$a_n = 10^{\prod_{i=1}^{n-1} f(i)\left\{\lg a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{\lg g(k)}{\prod_{i=1}^{k} f(i)}\right\}} = a_1^{\prod_{i=1}^{n-1} f(i)}\left[\prod_{k=1}^{n-1} g(k)^{\prod_{i=k+1}^{n-1} f(i)}\right].$$

2. 二阶变系数线性递推数列

满足公式 $$a_{n+2} = p(n)a_{n+1} + q(n)a_n \tag{3}$$

的数列 $\{a_n\}$，我们把它称为二阶变系数线性递推数列. 求由(3)式给出的递推数列的通项公式，一般采用拆项的思想方法，将 $p(n)$，$q(n)$ 分别拆成 $p(n) = f(n+1) + g(n)$ 和 $q(n) = -f(n)g(n)$，然后利用下面的结论来求(先转化为一阶线性递推数列).

定理　已知 a_1，a_2，

$$a_{n+2} = [f(n+1) + g(n)]a_{n+1} - f(n)g(n)a_n, \tag{4}$$

且对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$f(n) \neq 0$，则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：

$$a_n = \begin{cases} a_1, & n = 1, \\ \prod_{i=1}^{n-1} f(i)\left[\sum_{m=1}^{n-1} \prod_{k=1}^{m} \frac{g(k-1)}{f(k)} + a_1\right], & n \geqslant 2. \end{cases} \tag{5}$$



其中，$g(0)=a_2-f(1)a_1$.

证明 将递推式(4)变形，得

$$a_{n+2}-f(n+1)a_{n+1}=g(n)[a_{n+1}-f(n)a_n]. \tag{6}$$

反复应用(6)式，得 $n\geqslant 2$ 时：

$$\begin{aligned}a_{n+1}-f(n)a_n&=g(n-1)[a_n-f(n-1)a_{n-1}]\\&=g(n-1)g(n-2)[a_{n-1}-f(n-2)a_{n-2}]\\&=\cdots\\&=g(n-1)g(n-2)\cdots g(1)[a_2-f(1)a_1]\\&=\prod_{k=0}^{n-1}g(k),\end{aligned}$$

所以
$$a_{n+1}-f(n)a_n=\prod_{k=0}^{n-1}g(k). \tag{7}$$

又因为 $f(n)\neq 0$ 我们在(7)式两边同时除以 $f(1)f(2)\cdots f(n)$，得

$$\frac{a_{n+1}}{f(1)f(2)\cdots f(n)}-\frac{a_n}{f(1)f(2)\cdots f(n-1)}=\prod_{k=1}^{n}\frac{g(k-1)}{f(k)}. \tag{8}$$

令 $b_1=a_1, b_n=\dfrac{a_n}{f(1)f(2)\cdots f(n-1)}\ (n\geqslant 2)$，由(8)得到

$$b_{n+1}-b_n=\prod_{k=1}^{n}\frac{g(k-1)}{f(k)}.$$

从而
$$\begin{aligned}b_n&=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1\\&=\prod_{k=1}^{n-1}\frac{g(k-1)}{f(k)}+\prod_{k=1}^{n-2}\frac{g(k-1)}{f(k)}+\cdots+\frac{g(0)}{f(1)}+a_1\\&=\sum_{m=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\frac{g(k-1)}{f(k)}+a_1.\end{aligned}$$

所以当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n=f(1)f(2)\cdots f(n-1)b_n$

$$=\prod_{i=1}^{n-1}f(i)\left[\sum_{m=1}^{n-1}\prod_{k=1}^{m}\frac{g(k-1)}{f(k)}+a_1\right]$$

推论 已知 $a_1, a_2, f(n)\neq 0\ (n=1,2,\cdots)$，由递推式

$$a_{n+2}=2f(n+1)a_{n+1}-f(n+1)f(n)a_n \tag{9}$$

确定的数列 $\{a_n\}$，其通项公式为：

$$a_n=\begin{cases}a_1, & n=1,\\ \prod\limits_{i=1}^{n-1} f(i)\left[(n-1)\dfrac{a_2}{f(1)}-(n-2)a_1\right], & n\geqslant 2.\end{cases}$$

可证明(9)式是(4)式当 $g(n)=f(n+1)(n=1,2,\cdots)$时的特殊情况.

对于数列(1)和(4),重要的是理解和掌握求通项的思想方法,而不是硬记住其通项公式(2)和(5).

其他变系数的递推数列,求解的通法是先通过换元将关系式转化为一阶线性递推数列.



例题分析

例 1 已知:$a_1=1$,$na_{n+1}=(n+2)a_n+n$,求 a_n.

解 将原式转化为

$$a_{n+1}=\frac{n+2}{n}a_n+1. \tag{1}$$

由于(1)式不是易于递推的形式,故尚需转化.为此,可在(1)式两边同时除以$(n+2)(n+1)$,得

$$\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}=\frac{a_n}{(n+1)n}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}. \tag{2}$$

显然,(2)式呈 $A_{n+1}=A_n+f(n)$ 的形式.于是,反向递推,得

$$\begin{aligned}\frac{a_{n+1}}{(n+2)(n+1)}&=\frac{a_n}{(n+1)n}+\frac{1}{(n+2)(n+1)}\\&=\cdots\\&=\frac{a_1}{2\cdot 1}+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+1)}=\frac{n+1}{n+2}.\end{aligned}$$

从而 $a_{n+1}=(n+2)(n+1)\cdot\dfrac{n+1}{n+2}=(n+1)^2$,所以,$a_n=n^2$

说明 本题采用的是反向递推法.所谓反向递推法,就是从 a_n 推 a_{n-1},从 a_{n-1} 推 a_{n-2},…,直到从 a_2 推出 a_1 的这样一种递推方法,它与常规思路是相反的.

应用反向递推法要设法将原式化为 $A_{n+1}=A_n+f(n)$或 $A_{n+1}=g(n)A_n$ 的形式以便递推,其实质是降阶消项.

例 2 已知 $a_1=2$,$a_{n+1}=n(a_n)^n$,试求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 由题给条件易知 $a_n>0$,在递推式 $a_{n+1}=n(a_n)^n$ 两边取对数得



$$\lg a_{n+1}=n\lg a_n+\lg n,$$

令 $b_n=\lg a_n$，得 $$b_{n+1}=nb_n+\lg n.$$

类似式(2)容易求得 $$b_n=\begin{cases}\lg a_1=\lg 2, & n=1,\\ (n-1)!\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{\lg k}{k!}+\lg 2\right], & n\geqslant 2.\end{cases}$$

所以 $$a_n=10^{b_n}=\begin{cases}2, & n=1,\\ 2^{(n-1)!}\prod\limits_{k=1}^{n-1}(k)^{\frac{(n-1)!}{k!}}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

例 3 (2006 年安徽省高考理科卷第 21 题第 1 问)数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，已知 $a_1=\dfrac{1}{2}$，$S_n=n^2a_n-n(n-1)$，$n=1,2,\cdots$. 写出 S_n 与 S_{n-1} 的递推关系式($n\geqslant 2$)，并求 S_n 关于 n 的表达式.

解 因为 $$S_n=n^2a_n-n(n-1),$$

所以 $$S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-(n+1)n.$$

两式相减并整理得 $a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n-2n$，

即 $$a_{n+1}=\frac{n}{n+2}a_n+\frac{n}{n+2}\tag{1}$$

设辅助数列 $\{h_n\}$，使 $\dfrac{h_n}{h_{n+1}}=\dfrac{n}{n+2}$，则有 $h_{n+1}=\dfrac{n+2}{n}h_n=\dfrac{n+2}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n-1}h_{n-1}=\cdots=\dfrac{n+2}{n}\cdot\dfrac{n+1}{n-1}\cdot\dfrac{n}{n-2}\cdot\cdots\cdot\dfrac{3}{1}h_1$，取 $h_1=2$ 得 $h_{n+1}=(n+2)(n+1)$.

用 $h_{n+1}=(n+2)(n+1)$ 乘以(1)式的两边得

$$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n+2(n+1).$$

令 $b_n=(n+1)na_n$，则有 $b_{n+1}=b_n+2(n+1)$，$b_1=1$.

用累加法可求得 $b_n=1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}[2(k+1)]=(n+1)n-1$.

从而有 $a_n=1-\dfrac{1}{(n+1)n}$，将其代入 $S_n=n^2a_n-n(n-1)$，得 $S_n=\dfrac{n^2}{n+1}$.

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 的项满足 $a_1=a_2=1$，且 $2a_{n+2}=\dfrac{n}{n+1}a_{n+1}+\dfrac{1}{n}a_n$，试用 n 表示 a_n.

解 令 $b_n=\dfrac{a_n}{n}$，则已知递推式化为 $2(n+2)b_{n+2}=nb_{n+1}+b_n$，



所以
$$b_{n+2}=\frac{(n+2)-2}{2(n+2)}b_{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}b_n,$$
即
$$b_{n+2}=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)b_{n+1}+\frac{1}{2(n+2)}b_n.$$

这是知识扫描部分中式(4)当 $f(n)=\frac{1}{2}$，$g(n)=-\frac{1}{n+2}$ 的特殊情况.

由于此时 $g(0)=b_2-f(1)b_1=\frac{a_2}{2}-f(1)a_1=0$，所以由知识扫描部分中式(5)可得，

$b_n=b_1\prod\limits_{i=1}^{n-1}f(i)=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，故 $a_n=nb_n=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^{n-1}}$.

说明　有些递推关系式不容易直接改写成知识扫描部分中式(4)的数列，这时可通过适当的数列变换来达到目的.

例5　已知 $a_1=2$，$a_2=1$，且满足 $(n+2)(n+1)a_{n+2}=(n+1)na_{n+1}-(n-1)a_n$，求：$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{100}}{a_{101}}$.

解　递推式两边同时除以 $(n+2)(n+1)$，得
$$a_{n+2}=\frac{n}{n+2}a_{n+1}-\frac{n-1}{(n+1)(n+2)}a_n,$$
即
$$a_{n+2}=\left(\frac{1}{n+2}+\frac{n-1}{n+2}\right)a_{n+1}-\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n-1}{n+2}a_n.$$

这是知识扫描部分中式(4)当 $f(n)=\frac{1}{n+1}$，$g(n)=\frac{n-1}{n+2}$ 时的特殊情况，由于此时 $g(0)=a_2-a_1f(1)=1-\frac{1}{2}\times 2=0$，所以由知识扫描部分中的式(5)可得：
$$a_n=\prod_{i=1}^{n-1}f(i)a_1=\frac{2}{n!}.$$

故　$\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{100}}{a_{101}}=2+3+\cdots+101=\frac{100(2+101)}{2}=5015$

例6　(2002年全国高考理科卷压轴题)设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+1}=a_n^2-na_n+1$，$n=1,2,3,\cdots$，

(1) 当 $a_1=2$ 时，求 a_2,a_3,a_4，并由此猜想出 a_n 的一个通项公式；

(2) 当 $a_1\geqslant 3$ 时，证明对所有的 $n\geqslant 1$，有

(ⅰ) $a_n\geqslant n+2$；



(ⅱ) $\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_2}+\cdots+\frac{1}{1+a_n}\leqslant\frac{1}{2}$.

解 由于第(1)问比较简单，所以这里仅分析第(2)问的解答.

第(ⅰ)问 用数学归纳法证明：

① 当 $n=1$ 时，$a_1\geqslant 3=1+2$，不等式成立.

② 假设当 $n=k$ 时不等式成立，即 $a_k=k+2$，那么，

$$a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\geqslant(k+2)(k+2-k)-1\geqslant k+3$$

即当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}\geqslant(k+1)+2$.

根据①和②得，$n\geqslant1$ 时有 $a_n\geqslant n+2$ 成立.

此问②的变形方法，列举如下：

方法1 $a_{k+1}=a_k\cdot a_k-ka_k+1\geqslant(k+2)\cdot a_k-ka_k+1$

$$=2a_k+1\geqslant2(k+2)+1=2k+5\geqslant(k+1)+2.$$

方法2 $a_{k+1}=a_k(a_k-k)+1\geqslant a^k(k+2-k)+1\geqslant 2a_k+1$.

方法3 $a_{k+1}=(a_k-\frac{k}{2})^2-\frac{k^2}{4}+1$.

由于 $f(x)=\left(x-\frac{k}{2}\right)^2$ 在 $\left(\frac{k}{2},+\infty\right)$ 上单调递增，且 $k+2>\frac{k}{2}$，所以

$$a_{k+1}\geqslant\left(k+2-\frac{k}{2}\right)^2-\frac{k^2}{4}+1=2k+5>(k+1)+2.$$

第(ⅱ)问 由 $a_{n+1}=a_n(a_n-n)+1$，及(ⅰ)知，对 $k\geqslant2$，有

$$a_k=a_{k-1}(a_{k-1}-k+1)+1\geqslant a_{k-1}(k-1+2-k+1)+1=2a_{k-1}+1\cdots$$

所以 $a_k\geqslant 2^{k-1}a_1+2^{k-2}+\cdots+2+1=2^{k-1}(a_1+1)-1$

所以 $\frac{1}{1+a_k}\leqslant\frac{1}{1+a_1}\cdot\frac{1}{2^{k-1}}(k\geqslant2)$，故

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\leqslant\frac{1}{1+a_1}+\frac{1}{1+a_1}\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{1+a_1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}\leqslant\frac{2}{1+a_1}\leqslant\frac{2}{1+3}=\frac{1}{2}.$$

现探求此问的其他解决方法.

方法1 由(1)的证明可知 $a_{k+1}\geqslant2a_k+1$，即 $a_{k+1}+1\geqslant2(a_k+1)$，

从而 $a_{k+1}+1\geqslant(a_1+1)\cdot2^{k+1}\geqslant(3+1)\cdot2^{k-1}=2^{k+1}$，

所以 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k+1}}\leqslant\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}=\frac{1}{2}$.



方法2 先用数学归纳法证明:对于任意$n\in N^*$均有

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+a_k}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{n+1}}.\tag{1}$$

① 当$n=1$时,不等式(1)显然成立.

② 假设当$n=k$时,不等式(1)成立,即$S_k\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}$成立.

那么,$n=k+1$时,由于$1+a_k\geqslant 2^{k+1}$,所以

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{1+a_{k+1}}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{1+a_{k+1}}\leqslant\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+1}}+\frac{1}{2^{k+2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2^{k+2}}.$$

即此时不等式(1)成立.

由①和②可知,对于任意$n\in N^*$均有不等式(1)成立,故所证不等式成立.

评析 $a_n=p(n)\cdot a_n^2+f(n)\cdot a_n+r(p(n)\neq 0)$型数列是数列和二次函数、不等式相结合的典范,难度较大.求解此类问题的思维模式是:观察—归纳—猜想—证明.求解的主要方法是:分析法、比较法、消去法、综合法、放缩法、数学归纳法.

本题考查了递推关系为二次关系的数列与不等式的综合运用,显示了入手(归纳、猜想)容易,出手(不等式证明)难的命题特点.解决此类问题关键在变形过程.

例7 (2006年江西省高考理科卷第22题)已知数列$\{a_n\}$满足:$a_1=\frac{3}{2}$,且$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$ $(n\geqslant 2,n\in N^*)$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 证明:对一切正实数n,不等式$a_1a_2\cdots a_n<2\cdot n!$恒成立.

第(1)问用两种方法来解,具体如下:

分析1 由于所给递推关系结构的"复杂性",我们不妨先运用"归纳猜想法".

解 因为$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$ $(n\geqslant 2,n\in N^*)$,而$a_1=\frac{3}{2}=\frac{1\times 3^1}{3^1-1}$,所以,求得

$$a_2=\frac{9}{4}=\frac{2\times 3^2}{3^2-1},a_3=\frac{81}{26}=\frac{3\times 3^3}{3^3-1},a_4=\frac{81}{20}=\frac{4\times 3^4}{3^4-1},a_5=\frac{1215}{242}=\frac{5\times 3^5}{3^5-1},\cdots$$

由此猜想
$$a_n=\frac{n\cdot 3^n}{3^n-1}.$$

然后用数学归纳法证明其正确性,略.

说明 递推关系比较复杂的时候易联想到运用"归纳猜想法",但从上也不难看出,"猜想"是不容易的!



分析 2 从题给的递推关系：$a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}$，首先能发现这样的特殊性，即把右边的 n 除到左边后，左右两边项与对应的项数在分子和分母所处的"地位"是等同的，但还不是数列 $\left\{\frac{a_n}{n}\right\}$ 的递推关系的结构. 从右边分母的结构可以想到把等式两边化成原来的倒数，然后就会发现 $\left\{\frac{n}{a_n}\right\}$ 的递推关系！这种递推关系是属于比较容易求通项公式的结构，这样就可以运用"构造新数列"方法求这个数列的通项公式.

解 $a_n=\frac{3na_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\ (n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*)\Rightarrow\frac{a_n}{n}=\frac{3a_{n-1}}{2a_{n-1}+n-1}\Rightarrow\frac{n}{a_n}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{n-1}{a_{n-1}}\Rightarrow$

$\frac{n}{a_n}-1=\frac{1}{3}\left(\frac{n-1}{a_{n-1}}-1\right)\Rightarrow\frac{\frac{n}{a_n}-1}{\frac{n-1}{a_{n-1}}-1}=\frac{1}{3}\ (n\geqslant 2, n\in\mathbf{N}^*).$

所以，数列 $\left\{\frac{n}{a_n}-1\right\}$ 是公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列.

又因为 $a_1=\frac{3}{2}$，所以 $\frac{n}{a_n}-1=\left(\frac{2}{3}-1\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=\frac{n\cdot 3^n}{3^n-1}$.

第(2)问解法如下：

分析 由第(1)问可得 $a_n=\frac{n}{1-\frac{1}{3^n}}$，则有 $a_1a_2\cdots a_n=\frac{n!}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}$.

要证明 $a_1a_2\cdots a_n<2n!$，即证 $\frac{n!}{\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)}<2n!$，两边同除 $n!$，再变形，则只要证 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，有

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)>\frac{1}{2}. \tag{1}$$

若直接用数学归纳法证明，从 k 到 $(k+1)$ 时，右边常量不变，但左边在变，这样就无法用归纳假设. 故应考虑证明它的"加强式".

因为(1)式与 $\frac{1}{3^n}$ 相关，又 $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^{n+1}}=0$，故可把不等式(1)强化为

$$\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{3^n}\right)>\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{n+1}}. \tag{2}$$

再用数学归纳法加以证明.

证明 ① 当 $n=1$ 时，不等式(2)成立.



② 假设当 $n=k(k\geqslant1)$ 时，不等式 $(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^k})>\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+1}}$ 成立.

那么，当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}&(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^k})(1-\frac{1}{3^{k+1}})\\&>(\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+1}})(1-\frac{1}{3^{k+1}})=\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+1}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{k+1}}).\end{aligned}$$

而 $$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+1}}(\frac{1}{2}-\frac{1}{3^{k+1}})-(\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+2}})=\frac{1}{3^{k+1}}(\frac{1}{6}-\frac{1}{3^{k+1}})>0\quad(k\geqslant1).$$

所以 $$(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^k})(1-\frac{1}{3^{k+1}})>\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+2}}.$$

即当 $n=k+1$ 时，不等式(2)成立. 故对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式(2)成立.

所以 $$(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{3^2})\cdots(1-\frac{1}{3^k})>\frac{1}{2}+\frac{1}{3^{k+1}}>\frac{1}{2}.$$

原不等式得证.

说明 本例中多次用到构造数列的方法. 当有些命题直接解决遇到困难时，通过分析构造一个与原命题相关的新命题，通过对新命题的研究达到解决原命题的目的. 这种转化方法称为构造法.

构造法是数学中最富有活力的数学转化方法之一，通常表现形式是构造函数、构造方程、构造图形或构造复数、构造数列、构造三角式等带有鲜明个性特征的构造.

从第(2)问可见，若 c 是与 n 无关的常量，如用数学归纳法证明 $f(n)<c$(或 $f(n)>c$)一类的不等式时，可根据不等式的传递性，把常量 c 用含有 n 并比 c 小的(或大的)代数式子 $g(n)$($\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=c$)代换，把要证明的不等式转化为"加强不等式"，即 $f(n)<g(n)$(或 $f(n)>g(n)$).

例8 (2006年全国高中数学联合竞赛试题)给定整数 $n\geqslant2$，设 $M_0(x_0,y_0)$ 是抛物线 $y^2=nx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点. 试证明对于任意正整数 m，必存在整数 $k\geqslant2$，使 (x_0^m,y_0^m) 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点.

证明 因为 $y^2=nx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 $x_0=y_0=\frac{n\pm\sqrt{n^2-4}}{2}$，显然有 $x_0+\frac{1}{x_0}=n$.

若 (x_0^m,y_0^m) 为抛物线 $y^2=kx-1$ 与直线 $y=x$ 的一个交点，则 $k=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$.

记 $k_m=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$，则



$$k_{m+1}=k_m\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)-k_{m-1}=nk_m-k_{m-1}\ (m\geqslant 2)\tag{1}$$

由于 $k_1=n$ 是整数，$k_2=x_0^2+\frac{1}{x_0^2}=\left(x_0+\frac{1}{x_0}\right)^2-2=n^2-2$ 也是整数，所以根据数学归纳法，通过(1)式可证明对于一切正整数 m，$k_m=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$ 是正整数. 现在，对于任意正整数 m，取 $k=x_0^m+\frac{1}{x_0^m}$，就能使 $y^2=kx-1$ 与 $y=x$ 的交点为 (x_0^m,y_0^m).

例 9 (2007 年全国高中数学联合竞赛(吉林省预赛)试题)设 $\{a_n\}$ 为一个整数数列，并且满足：对任意的 $n\in\mathbf{N}^*$，均有 $(n-1)a_{n+1}=(n+1)a_n-2(n-1)$，且 $2008\mid a_{2007}$，求最小的正整数 $n(n\geqslant 2)$，使得 $2008\mid a_n$.

解 取 $n=1$ 时，有 $a_1=0$，原式变形有

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{n-1}a_n-2.\tag{1}$$

令 $b_n=\frac{a_n}{n-1}$，则有 $nb_{n+1}=(n+1)b_n-2$，于是，当 $n\geqslant 2$ 时，均有

$$b_{n+1}-2=\frac{n+1}{n}(b_n-2).\tag{2}$$

由(2)式易知，$b_n-2=\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdots\frac{3}{2}(b_2-2)=\left(\frac{b_2}{2}-1\right)n$

$$\Rightarrow a_n=(n-1)\left[\left(\frac{a_2}{2}-1\right)n+2\right].\tag{3}$$

由已知条件 $a_n\in\mathbf{Z}$ 可知，$\frac{a_2}{2}\in\mathbf{Z}$，故设 $a_2=2k$，$k\in\mathbf{Z}$.

由(3)式推导出 $a_n=(n-1)[(k-1)n+2]$.

由 $2008\mid a_{2007}\Rightarrow 2006(2007k-2005)\equiv 0(\bmod 2008)$

$\Rightarrow k\equiv 3(\bmod 1004)$

$\Rightarrow a_n=(n-1)[(1004m+2)n+2](m\in\mathbf{Z})$.

则 $2008\mid a_n\Leftrightarrow 2008\mid(n-1)[(1004m+2)n+2]\Rightarrow 1004\mid(n-1)(n+1)$，则 $2\nmid n$.

设 $n=2l+1$，$l\in\mathbf{Z}$，$\Rightarrow 251\mid l(l+1)$，又 $(l,l+1)=1$，251 是一个质数，故 $l+1\geqslant 251$，$l_{\min}=250\Rightarrow n_{\min}=501$.

例 10 (1998 年加拿大数学奥林匹克试题)设 m 是一个正整数. 数列 $\{a_n\}$ 定义为：$a_0=0$，$a_1=m$，$a_{n+1}=m^2a_n-a_{n-1}$，$n\geqslant 1$. 证明：一个有序非负整数对 (a,b)(其中 $a<b$)是



方程$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$的解的充分必要条件是(a,b)具有(a_n,a_{n+1})的形式，其中$n\geq 0$.

证明 如果正整数a,b满足$\frac{a^2+b^2}{ab+1}=m^2$，$0<a<b$，那么$a\geq m$.

事实上，如果$0<a<m$，把上式写成关于b的一元二次方程的形式是：

$$b^2-(m^2a)b+(a^2-m^2)=0$$

设这个方程的另一个根为b_1，由韦达定理，得

$$\begin{cases}b_1+b=m^2a & ①\\ b_1b=a^2-m^2 & ②\end{cases}$$

由①可知，b_1是整数，由②可知，$b_1<0$，于是b_1为负整数，与$m^2=\frac{a^2+b_1^2}{ab_1+1}<0$矛盾.
所以$a\geq m$.

而由上面过程来看，只要$m<a<b$，b总可以用另一个正整数b_1取代，并且

$$b_1b=a^2-m^2<a^2<ab,$$

所以$b_1<a$.

这样，由对称性将一组解(a,b)用(b_1,a)来替代了，此处$b_1=m^2a-b$.

这一过程不可能无限地进行下去，而由上述论证可知，最后总能化到$(0,m)$这组"基本解". 以上每步都是可以逆推的. 最后便知(a,b)必定是数列$\{a_n\}$的连续两项.

能力训练

1. (2005年江西省竞赛试题) 已知数列$\{x_n\}$满足$(n+1)x_{n+1}=x_n+n$，且$x_1=2$，则$x_{2005}=$________.

2. (2007年福州市高中数学竞赛题) 数列$\{a_n\}$中，$a_1=6$，且$a_n-2a_{n-1}=\frac{2a_{n-1}}{n}+n+1$ $(n\in\mathbf{N}^*,n\geq 2)$，则此数列的通项公式$a_n=$________.

3. 设$x_1=4$，且$x_n=\frac{5n+2}{5n-3}x_{n-1}+7(5n+2)$ $(n=2,3,\cdots)$，则通项$x_n=$________

4. 已知数列$\{a_n\}$满足条件$(n-1)a_{n+1}=(n+1)(a_n-1)$，$a_2=6$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为________.



5. 设数列$\{a_n\}$满足$a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{3}$，且对任意正整数$n$，都有$a_{n+2}=2(n+2)a_{n+1}-(n+2)(n+1)a_n+\frac{n^2+3n+1}{n+3}$，则数列$\{a_n\}$的通项公式为____.

6. (2002年湖南省高中数学竞赛试题) 已知$a_1=1, a_2=3, a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，若当$m\geqslant n$时，$a_m$的值都能被9整除，则$n$的最小值为____.

7. 若$a_{n+2}-\frac{2(n+2)}{n+1}a_{n+1}+\frac{n+2}{n}a_n=0$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

8. 设数列$\{x_n\}$满足$x_1=\frac{1}{2}, x_{n+1}=x_n+\frac{x_n^2}{n^2}$，证明$x_{2007}<1004$.

9. (2007年全国高中数学联合竞赛(江西省预赛)试题) 数列$\{a_n\}$满足：$a_1=\frac{1}{2}$，$a_n=\frac{na_n}{(n+1)(na_n+1)}$，令$x_k=a_1+a_2+\cdots+a_k, y_k=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_k}, k=1,2,\cdots$，求$\sum_{k=1}^{n}x_ky_k$.

10. 已知数列$\{a_n\}$中$a_1=-1, a_2=2$，且满足$(n+2)a_{n+2}=-(n+1)a_{n+1}+n^2a_n$，试写出其通项公式.

11. (1992年中国台北数学奥林匹克试题) 设r为正整数，定义数列$\{a_n\}$如下：$a_1=1, a_{n+1}=\frac{na_n+2(n+1)^{2r}}{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$. 求证：$a_n\in\mathbf{N}^*$.

12. 已知$a_1=1, a_2=2, a_{n+2}=a_{n+1}+n^2a_n$，试写出数列$\{a_n\}$的通项公式.

13. 设p, q为非零常数，则由递推式

$$x_{n+2}=(-1)^n px_{n+1}+qx_n \tag{1}$$

给出的数列$\{x_n\}$(已知x_1, x_2)，称为二阶拟线性递归数列.

若方程$t^2=pt-q$的两根为t_1, t_2，记$\delta(n)=(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}$，则(1)式的通项公式：当$t_1\neq t_2$时，为$x_n=\frac{\delta(n)}{t_1-t_2}[t_1^{n-2}(x_2-t_2x_1)-t_2^{n-2}(x_1-t_1x_2)]$；当$t_1=t_2=t$时，$x_n=\delta(n)\cdot t^{n-2}[(n-1)x_2-(n-2)tx_1]$.

14. 已知$a_1=1, a_{n+1}=\frac{na_n}{(n+1)a_n+1}$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

15. 已知正项数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$a_{n+1}=\frac{a_n}{2^na_n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$



(1) 求数列$\{a_n\}$的通项a_n；

(2) 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{2^k}{k^2+k}a_k$；

(3) 求证：$2\leqslant\frac{(2^n-1)(1+n)^n}{n^n}a_n<3$．

16. 对每个正实数a_1，按下列方式构造数列$a_1,a_2,\cdots,a_{n+1}=a_1+\frac{n}{a_n}(n=1,2,\cdots)$．试求出所有的使数列单调增加的$a_1$．

3　非线性递推数列

知识扫描

1. 非线性递推数列的主要类型

(1) 乘积幂指型：通过取对数将其转化为和(差)形式的递推关系.

(2) 含根号型：基本方法是去根号，通过开方或换元等.

(3) 分段递推型：递推关系是分段给出的，求解时要综合考虑各段递推关系.

(4) 数表型：解决这类问题的关键是要抓住问题中所给出的各行与各列所构成数列的特征，再根据所给出的特殊项推出各行、各列的前几项，进而求出通项，从而顺利地解决相关问题.

(5) 分式型：一般可用待定系数法或特征根法求通项. 下面是分式型递推数列的一些结论.

如果数列$\{a_n\}$满足下列条件：已知a_1的值且对于$n\in\mathbf{N}^*$，都有$a_{n+1}=\dfrac{pa_n+q}{ra_n+h}$(其中$p,q,r,h$均为常数，且$ph\neq qr$，$r\neq 0$，$a_1\neq -\dfrac{h}{r}$)，那么，可作特征方程$x=\dfrac{px+q}{rx+h}$，解特征方程并求出特征根.

① 当特征方程有2个相同的根λ时，若$a_1=\lambda$，则$a_n=\lambda$，$n\in\mathbf{N}^*$；若$a_1\neq\lambda$，则$\left\{\dfrac{1}{a_n-\lambda}\right\}$是等差数列. 设$\dfrac{1}{a_n-\lambda}=b_n$，则$b_n=\dfrac{1}{a_1-\lambda}+(n-1)\dfrac{r}{p-r\lambda}$，$n\in\mathbf{N}^*$，且$a_n=\dfrac{1}{b_n}+\lambda$，$n\in\mathbf{N}^*$. 特别地，当存在$n_0\in\mathbf{N}$，使$b_{n_0}=0$时，无穷数列$\{a_n\}$不存在.

② 当特征方程有2个相异的根λ_1,λ_2时，$\left\{\dfrac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}\right\}$是等比数列. 设$\dfrac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}=c_n$，则$c_n=\dfrac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\left(\dfrac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}\right)^{n-1}$(其中$a_1\neq\lambda_2$，$n\in\mathbf{N}^*$)，且$a_n=\dfrac{\lambda_2 c_n-\lambda_1}{c_n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

③ 当特征方程没有实数根时，该数列是周期数列，易求出通项公式



证明 ① 作变换 $d_n=a_n-\lambda, n\in\mathbf{N}^*$，则

$$d_{n+1}=a_{n+1}-\lambda=\frac{pa_n+q}{ra_n+h}-\lambda$$

$$=\frac{a_n(p-\lambda r)+q-\lambda h}{ra_n+h}$$

$$=\frac{(d_n+\lambda)(p-\lambda r)+q-\lambda h}{r(d_n+\lambda)+h}$$

$$=\frac{d_n(p-\lambda r)-[r\lambda^2+\lambda(h-p)-q]}{rd_n+h+r\lambda} \tag{1}$$

由于 λ 是特征方程的根，可得 $\lambda=\dfrac{p\lambda+q}{r\lambda+h}$，

即
$$r\lambda^2+\lambda(h-p)-q=0. \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$d_{n+1}=\frac{d_n(p-\lambda r)}{rd_n+h+\lambda r}, n\in\mathbf{N}^*. \tag{3}$$

将 $\lambda=\dfrac{p}{r}$ 代入特征方程，整理得 $ph=qr$，这与已知条件 $ph\neq qr$ 矛盾，故特征方程的根 $\lambda\neq\dfrac{p}{r}$，于是

$$p-\lambda r\neq 0. \tag{4}$$

当 $d_1=0$，即 $a_1=d_1+\lambda=\lambda$ 时，由式(3)得 $d_n=0, n\in\mathbf{N}^*$，故

$$a_n=d_n+\lambda=\lambda, n\in\mathbf{N};$$

当 $d_1\neq0$，即 $a_1\neq\lambda$ 时，由式(3)，式(4)可得 $d_n\neq0, n\in\mathbf{N}$. 此时，可对式(3)作如下变化：

$$\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{rd_n+h+\lambda r}{d_n(p-\lambda r)}=\frac{h+\lambda r}{p-\lambda r}\cdot\frac{1}{d_n}+\frac{r}{p-\lambda r}. \tag{5}$$

由于 λ 是方程 $x=\dfrac{px+q}{rx+h}$ 的 2 个相同的根，可求得 $\lambda=\dfrac{p-h}{2r}$，所以

$$\frac{h+\lambda r}{p-\lambda r}=\frac{h+\dfrac{p-h}{2r}r}{p-\dfrac{p-h}{2r}r}=\frac{h+p}{p+h}=1. \tag{6}$$

将式(6)代入式(5)，得

$$\frac{1}{d_{n+1}}=\frac{1}{d_n}+\frac{r}{p-\lambda r}.$$

令 $b_n=\frac{1}{d_n}$，$n\in \mathbf{N}^*$，则 $b_{n+1}=b_n+\frac{r}{p-\lambda r}$，故数列 $\{b_n\}$ 是以 $\frac{r}{p-\lambda r}$ 为公差的等差数列，所以

$$b_n=b_1+(n-1)\cdot\frac{r}{p-\lambda r}\left(\text{其中，}b_1=\frac{1}{d_1}=\frac{1}{a_1-\lambda}\right).$$

当 $n\in \mathbf{N}$，$b_n\neq 0$ 时，$a_n=d_n+\lambda=\frac{1}{b_n}+\lambda$；

当存在 $n_0\in \mathbf{N}$，使 $b_{n_0}=0$ 时，$a_{n_0}=d_{n_0}+\lambda=\frac{1}{b_{n_0}}+\lambda$ 无意义.

综上所述，无穷数列 $\{a_n\}$ 是不存在的.

② 因为特征方程有 2 个相异的根 λ_1，λ_2，所以其中必有一个特征根不等于 a_1，不妨令 $\lambda_2\neq a_1$，于是可作变换 $c_n=\frac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}$，$n\in \mathbf{N}^*$，故 $c_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\lambda_1}{a_{n+1}-\lambda_2}$，将 $a_{n+1}=\frac{pa_n+q}{ra_n+h}$ 代入再整理得

$$c_{n+1}=\frac{a_n(p-\lambda_1 r)+q-\lambda_1 h}{a_n(p-\lambda_2 r)+q-\lambda_2 h}. \tag{7}$$

由第 ① 部分的证明过程可知，$x=\frac{p}{r}$ 不是特征方程的根，得 $\lambda_1\neq\frac{p}{r}$，$\lambda_2\neq\frac{p}{r}$，故 $p-\lambda_1 r\neq 0$，$p-\lambda_2 r\neq 0$，所以由式(7)可得

$$c_{n+1}=\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}\cdot\frac{a_n+\frac{q-\lambda_1 h}{p-\lambda_1 r}}{a_n+\frac{q-\lambda_2 h}{p-\lambda_2 r}}. \tag{8}$$

因为特征方程 $x=\frac{px+q}{rx+h}$ 有 2 个相异根 λ_1，λ_2，可得方程 $rx^2+x(h-p)-q=0$ 有 2 个相异根 λ_1，λ_2，而方程 $-x=\frac{q-xh}{p-xr}$ 与方程 $rx^2+x(h-p)-q=0$ 又是同解方程，所以

$$\frac{q-\lambda_1 h}{p-\lambda_1 r}=-\lambda_1,\ \frac{q-\lambda_2 h}{p-\lambda_2 r}=-\lambda_2. \tag{9}$$

将式(9)代入式(8)，可得

$$c_{n+1}=\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}\cdot\frac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}=\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}c_n.$$

当 $c_1\neq 0$，即 $a_1\neq\lambda_1$ 时，数列 $\{c_n\}$ 是等比数列，公比为 $\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}$，此时对于 $n\in \mathbf{N}^*$，都有



$$c_n = c_1\left(\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}\right)^{n-1} = \left(\frac{a_1-\lambda_1}{a_1-\lambda_2}\right)\left(\frac{p-\lambda_1 r}{p-\lambda_2 r}\right)^{n-1}. \tag{10}$$

当 $c_1=0$，即 $a_1=\lambda_1$ 时，式(10)也成立．由 $c_n=\frac{a_n-\lambda_1}{a_n-\lambda_2}$ 且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，可知 $a_n=\frac{\lambda_2 c_n-\lambda_1}{c_n-1}, n\in \mathbf{N}^*$.

③ 当特征方程没有实数根时，则该数列是周期数列，要根据 p,q,r,h 的具体取值求出一个周期数列的项，才能求出通项公式.

2 求非线性递推数列通项的基本方法

将非线性递推数列转化为线性递推数列，然后再求通项公式.

例题分析

例1 (2004 年西部数学奥林匹克竞赛试题) 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a_2=1$ 且 $a_{n+2}=\frac{1}{a_{n+1}}+a_n, n=1,2,\cdots$，求 a_{2004}.

解 由题设得 $a_{n+2}a_{n+1}-a_{n+1}a_n=1$，所以 $\{a_{n+1}a_n\}$ 是一个首项为 1、公差为 1 的等差数列，从而，$a_{n+1}a_n=n, n=1,2,\cdots$，因此

$$a_{n+2}=\frac{n+1}{a_{n+1}}=\frac{n+1}{\frac{n}{a_n}}=\frac{n+1}{n}a_n, n=1,2,\cdots$$

故

$$\begin{aligned}a_{2004}&=\frac{2003}{2002}a_{2002}=\frac{2003}{2002}\cdot\frac{2001}{2000}a_{2000}\\&=\cdots\\&=\frac{2003}{2002}\cdot\frac{2001}{2000}\cdot\cdots\cdot\frac{3}{2}a_2\\&=\frac{3\cdot 5\cdot\cdots\cdot 2003}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot 2002}\left(=\frac{2003!!}{2002!!}\right)\end{aligned}$$

评析 解决数学问题时应整体把握，如这里把 $a_{n+1}a_n$ 看成一个整体，得到 $\{a_{n+1}a_n\}$ 是等差数列，这是本题简洁获解的关键.

例2 (2007 年全国高中数学联赛(湖北省预赛)试题) 数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=\frac{2}{3}$，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{\frac{2}{3}(a_{n+1}+a_n)}$，则 $a_{2007}=$ ______.

解 由 $a_{n+1}-a_n=\sqrt{\frac{2}{3}(a_{n+1}+a_n)}$，两边平方得 $3(a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n)$。

又 $3(a_n-a_{n-1})^2=2(a_n+a_{n-1})$，两式相减得

$$3(a_{n+1}-a_{n-1})(a_{n+1}-2a_n+a_{n-1})=2(a_{n+1}-a_{n-1}).$$

由 $a_1=\frac{2}{3}$，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{\frac{2}{3}(a_{n+1}+a_n)}$，求得 $a_2=2$。

又由递推关系式易知数列$\{a_n\}$是单调递增数列，则 $a_{n+1}-a_{n-1}\neq 0$。

故
$$3(a_{n+1}-2a_n+a_{n-1})=2\Rightarrow (a_{n+1}-a_n)-(a_n-a_{n-1})=\frac{2}{3}$$

所以，数列$\{a_{n+1}-a_n\}$是以 $a_2-a_1=\frac{4}{3}$ 为首项、$\frac{2}{3}$ 为公差的等差数列

因此
$$a_{n+1}-a_n=\frac{4}{3}+\frac{2}{3}(n-1)=\frac{2}{3}(n+1).$$

于是
$$a_n=a_1+\frac{2}{3}(2+3+\cdots+n)=\frac{1}{3}n(n+1).$$

故 $a_{2007}=1343352$。

例 3 （2003 年南韩数学奥林匹克试题改编）数列$\{a_n\}$满足 $a_0=0$，$a_{n+1}=ka_n+\sqrt{(k^2-1)a_n^2+1}$ $(n=0,1,2,\cdots,k\geqslant 2)$，其中 k 为给定的正整数．求数列$\{a_n\}$的通项公式．

解 由已知条件可得 $\quad a_{n+1}^2-2ka_na_{n+1}+a_n^2-1=0$，

所以 $\quad a_{n+2}^2-2ka_{n+1}a_{n+2}+a_{n+1}^2-1=0$，

将以上两式相减可得 $\quad a_{n+2}^2-a_n^2-2ka_{n+1}a_{n+2}+2ka_na_{n+1}=0$，

即 $\quad (a_{n+2}-a_n)(a_{n+2}+a_n-2ka_{n+1})=0$。

我们可证数列$\{a_n\}$是严格递增的，故

$$a_{n+2}=2ka_{n+1}-a_n. \tag{1}$$

易知
$$a_0=0,a_1=1.$$

(1)式的特征方程为 $x^2=2kx-1$，得 $x=k\pm\sqrt{k^2-1}$。

故可设
$$a_n=A(k+\sqrt{k^2-1})^n+B(k-\sqrt{k^2-1})^n\ (n\in\mathbf{N}^*)$$

再结合 $a_0=0$，$a_1=1$ 可知

$$\begin{cases}a_1=Ak+A\sqrt{k^2-1}+Bk-B\sqrt{k^2-1}=1,\\ a_0=A+B=0,\end{cases}$$



解得 $$A=\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}},B=-\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}.$$

所以 $a_n=\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}(k+\sqrt{k^2-1})^n-\frac{1}{2\sqrt{k^2-1}}(k-\sqrt{k^2-1})^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

评析 对于非线性化的递推式，一般先将其线性化，然后再寻求其他解法．本题将递推式化为 $a_{n+1}^2-2ka_na_{n+1}+a_n^2=1$ 后，通过取 n 和 $n+1$ 得到两式，再相减进一步化简，最后得到二阶线性递推关系．

例 4 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_2=8\sqrt{a_1}$，$a_{n+1}=2\sqrt{2a_na_1}$，求数列的通项公式 a_n．

解 令 $n=1$，$a_{n+1}=2\sqrt{2a_na_1}$，即 $a_2=2\sqrt{2}a_1$．

又 $a_2=8\sqrt{a_1}$，所以 $a_1=0$ 或 $a_1=8$．

① 当 $a_1=0$ 时，由题设易得 $a_n=0$．

② 当 $a_1=8$ 时，$a_{n+1}=2\sqrt{2a_na_1}$，即为 $a_{n+1}=8\sqrt{a_n}(n>0)$．

两边取以 2 为底的对数，得 $\log_2a_{n+1}=\frac{1}{2}\log_2a_n+3$．

设 $b_n=\log_2a_n$ 则有

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+3, \tag{1}$$

将 n 用 $n+1$ 替换，得

$$b_{n+2}=\frac{1}{2}b_{n+1}+3. \tag{2}$$

(2)－(1)，得 $b_{n+2}-b_{n+1}=\frac{1}{2}(b_{n+1}-b_n)$，而 $b_1=3$，$b_2=4.5$，$b_2-b_1=\frac{3}{2}$，从而知 $\{b_{n+1}-b_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$，首项为 $\frac{3}{2}$ 的等比数列．

所以 $$b_{n+1}-b_n=\frac{3}{2}\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=\frac{3}{2^n}.$$

所以 $$b_n=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_2-b_1)+b_1$$
$$=\frac{3}{2^{n-1}}+\frac{3}{2^{n-2}}+\cdots+\frac{3}{2}+3=6-\frac{3}{2^{n-1}}.$$

所以 $$a_n=2^{b_n}=2^{6-\frac{3}{2^{n-1}}}$$

综上①、②知，$a_n=0$，或 $a_n=2^{6-\frac{3}{2^{n-1}}}$．

说明 本题获解的关键是取对数后用替换相减法消去常数 3，得到等比数列



$\{b_{n+1}-b_n\}$.

例 5 (第 14 届"希望杯"数学竞赛题)在数列$\{x_n\}$中,$x_1=\frac{1}{3}$,$x_{n+1}=\frac{2x_n}{2x_n+1}$,求数列$\{x_n\}$的通项公式

解法 1 由 $x_{n+1}=\frac{2x_n}{2x_n+1}$,得$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_n}+1$.设 $a_n=\frac{1}{x_n}$,则 $a_1=3$,$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$.变形可得 $a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$,可知数列$\{a_n-2\}$是首项为 $a_1-2=1$,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列,所以 $a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,即 $a_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+2$.由此可得 $x_n=\frac{2^{n-1}}{2^n+1}$.

解法 2 由 $x_{n+1}=\frac{2x_n}{2x_n+1}$,得$\frac{1}{x_{n+1}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x_n}+1$,记 $f^{(n)}(x)=\frac{1}{x_n}$,则

$$
\begin{aligned}
f^{(n)}(x)&=\frac{1}{2}f^{(n-1)}(x)+1\\
&=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f^{(n-2)}(x)+1\right]+1\\
&=\frac{1}{2^2}f^{(n-2)}(x)+\frac{1}{2}+1\\
&=\frac{1}{2^2}\left[\frac{1}{2}f^{(n-3)}(x)+1\right]+\frac{1}{2}+1\\
&=\frac{1}{2^3}f^{(n-3)}(x)+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2}+1\\
&=\cdots\\
&=\frac{1}{2^{n-1}}f^{(1)}(x)+\frac{1}{2^{n-2}}+\frac{1}{2^{n-3}}+\cdots+\frac{1}{2}+1.
\end{aligned}
$$

又因为
$$f^{(1)}(x)=\frac{1}{x_1}=3,$$

所以
$$f^{(n)}(x)=\frac{1}{2^{n-1}}\times 3+\frac{1-\frac{1}{2^{n-1}}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{2^{n-1}}+2-\frac{2}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}+2=\frac{1+2^n}{2^{n-1}},$$

故
$$x_n=\frac{2^{n-1}}{2^n+1}.$$

例 6 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=a_2=1$,$a_n=\frac{a_{n-1}^2+2}{a_{n-2}}(n\geqslant 3)$,求通项公式 a_n.

解 原递推关系可化为 $a_na_{n-2}=a_{n-1}^2+2$.

上式用 $n+1$ 代替 n 得 $a_{n+1}a_{n-1}=a_n^2+2$.

两式相减得 $a_{n+1}a_{n-1}-a_na_{n-2}=a_n^2-a_{n-1}^2$，即 $\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}$，

令 $b_n=\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}\ (n\geqslant 3)$，则 $b_n=b_{n-1}=\cdots=b_3=\dfrac{a_3+a_1}{a_2}=4$

故 $\dfrac{a_n+a_{n-2}}{a_{n-1}}=4$，即 $a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}\ (n\geqslant 3)$.

由其特征方程 x^2-4x+1 解出两个根为 $x_1=2+\sqrt{3}$，$x_2=2-\sqrt{3}$.

可设
$$a_n=A(2+\sqrt{3})^n+B(2-\sqrt{3})^n(n\in\mathbf{N}^*).$$

由 $a_1=a_2=1$ 得
$$\begin{cases}A(2+\sqrt{3})+B(2-\sqrt{3})=1,\\A(2+\sqrt{3})^2+B(2-\sqrt{3})^2=1,\end{cases}$$

解得
$$A=\frac{-5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}},B=\frac{5+3\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

所以 $a_n=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\left[(-5+3\sqrt{3})(2+\sqrt{3})^n+(5+3\sqrt{3})(2-\sqrt{3})^n\right]\ (n\in\mathbf{N}^*)$.

评析 本题看上去很难下手，但通过几次代换后，得到二阶线性递推数列 $a_{n+2}=\alpha a_n+\beta a_{n+1}$ 的形式. 做题时要多注意观察将那些自己不太熟悉的式子转化为熟悉的式子来求解.

本题结论的一般情形为：设数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=a,x_2=b \qquad\qquad (1)$$

$$x_{n+2}=\frac{x_{n+1}^2+c}{x_n}\ (n\in\mathbf{N}) \qquad\qquad (2)$$

其中 $abc\neq 0$. 若数列 $\{x_n\}$ 满足(1)式和(2)式，则它必定满足

$$x_{n+2}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}x_{n+1}-x_n\ (n\in\mathbf{N}) \qquad\qquad (3)$$

证明 用数学归纳法.

① $n=1$ 时，由(1)式和(2)式可得

$$x_3=\frac{b^2+c}{a}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}\cdot b-a=\frac{a^2+b^2+c}{ab}x_2-x_1.$$

这表明 $n=1$ 时等式(3)成立.

② 假设 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时等式(3)成立，就有 $x_{k+2}=\dfrac{a^2+b^2+c}{ab}x_{k+1}-x_k$，



即
$$x_{k+2}+x_k=\frac{a^2+b^2+c}{ab}x_{k+1}.\tag{4}$$

又在(2)式中令 $n=k,k+1$，分别可得
$$x_{k+2}=\frac{x_{k+1}^2+c}{x_k},\tag{5}$$
$$x_{k+3}=\frac{x_{k+2}^2+c}{x_{k+1}}.\tag{6}$$

由(5)式得 $c=x_{k+2}x_k-x_{k+1}^2$，代入(6)式可得
$$x_{k+3}=\frac{x_{k+2}^2+x_{k+2}x_k-x_{k+1}^2}{x_{k+1}}=\frac{(x_{k+2}+x_k)x_{k+2}-x_{k+1}^2}{x_{k+1}},$$

再将(4)式代入上式，解得 $x_{k+3}=\frac{a^2+b^2+c}{ab}x_{k+2}-x_{k+1}$.

这表明 $n=k+1$ 时等式(3)也成立.

因此，对一切 $n\in \mathbf{N}_+$ 等式(3)都成立. 引理得证.

例7 (2005年福建省高考理科卷试题)已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=a, a_{n+1}=1+\frac{1}{a_n}$. 我们知道当 a 取不同的值时，得到不同的数列. 如当 $a=1$ 时，得到无穷数列：$1,2,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\cdots$；当 $a=-\frac{1}{2}$ 时，得到有穷数列：$-\frac{1}{2},-1,0$.

(1) 求当 a 为何值时，$a_4=0$；

(2) 设数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=-1, b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$，求证 a 取数列 $\{b_n\}$ 中的任一个数，都可以得到一个有穷数列 $\{a_n\}$；

(3) 若 $\frac{3}{2}<a_n<2(n\geqslant 4)$，求 a 的取值范围.

解 (1) $a_2=1+\frac{1}{a}=\frac{a+1}{a}$，$a_3=1+\frac{1}{a_2}=\frac{2a+1}{a+1}$，$a_4=1+\frac{1}{a_3}=\frac{3a+2}{2a+1}$，故当 $a=-\frac{2}{3}$ 时，$a_4=0$.

(2) 因为 $b_1=-1, b_{n+1}=\frac{1}{b_n-1}$，所以 $b_n=\frac{1}{b_{n+1}}+1$. 设 $a=b_n$，则
$$a_2=1+\frac{1}{a_1}=1+\frac{1}{b_n}=b_{n-1},$$
$$a_3=1+\frac{1}{a_2}=1+\frac{1}{b_{n-1}}=b_{n-2},$$
$$\cdots$$



（注意到 a_n 与 b_m 的脚码和为 $n+1$）

$$a_n=1+\frac{1}{a_{n-1}}=1+\frac{1}{b_2}=b_1=-1,$$

所以

$$a_{n+1}=0.$$

故 a 取 $\{b_n\}$ 中任一个数，都可得到有穷数列 $\{a_n\}$.

(3) 由 $\frac{3}{2}<a_n<2$，得 $\frac{3}{2}<1+\frac{1}{a_{n-1}}<2$，即 $1<a_{n-1}<2$. 所以要使 $\frac{3}{2}<a_n<2$，当且仅当其前一项 a_{n-1} 满足 $1<a_{n-1}<2$.

因为 $\left(\frac{3}{2},2\right)\subsetneqq(1,2)$，所以 $a_n\in\left(\frac{3}{2},2\right)$. 由 $a_2=\frac{3a+2}{2a+1}$ 得 $\frac{3}{2}<\frac{3a+2}{2a+1}<2$，解得 $a>0$.

评析 本题结论可作如下的推广：

(1) 分式递推数列 $\begin{cases}a_1=a\\ a_{n+1}=c+\frac{k}{a_n}\end{cases}$ ① 当 $k>0,c\neq0$ 时，首项 $a=\frac{c+\sqrt{c^2+4k}}{2}$ 或 $a=\frac{c-\sqrt{c^2+4k}}{2}$ 时，都可以得到一个无穷常数数列；② 当 $k<0,c^2+4k<0$ 时，首项 a 无论取何值，都不能得到一个无穷数列；③ 当 $k<0,c^2+4k=0$ 时，首项 $a=\frac{c}{2}$ 时，可以得到一个无穷数列；④ 当 $k<0,c^2+4k>0$ 时，首项 $a=\frac{c+\sqrt{c^2+4k}}{2}$ 或 $a=\frac{c-\sqrt{c^2+4k}}{2}$ 时，都可以得到一个无穷常数数列.

证明 由不动点理论可知，能使上述递推数列产生一个无穷的常数数列的首项是函数 $f(x)=c+\frac{k}{x}$ 的不动点，令 $c+\frac{k}{x}=x$，变形得 $x^2-cx-k=0$，由于 $k>0$，知 $\Delta=c^2+4k>0$，得两个不动点 $x_1=\frac{c+\sqrt{c^2+4k}}{2}$，$x_2=\frac{c-\sqrt{c^2+4k}}{2}$，所以当首项 $a=\frac{c+\sqrt{c^2+4k}}{2}$ 或 $a=\frac{c-\sqrt{c^2+4k}}{2}$ 时，都可以得到相应的一个无穷常数数列. 其余结论的证明类似(略).

(2) 分式递推数列 $\begin{cases}a_1=a,\\ a_{n+1}=c+\frac{k}{a_n+d},\end{cases}$ $(c\neq0,k\neq0)$，若 $c+d\neq0$，那么首项 a 取数列 $\begin{cases}b_1=\frac{k}{c+d}-d\\ b_{n+1}=\frac{k}{b_n-c}-d\end{cases}$ 中的每一个数，都可得一有穷数列；若 $c+d=0$，那么无论首项 a 取何值，都不能得到一个有穷数列.



证明 若 $c+d\neq0$，当首项 a 取数列$\begin{cases}b_1=-\dfrac{k}{c+d}-d\\ b_{n+1}=\dfrac{k}{b_n-c}-d\end{cases}$中的一个数，不妨设 $a=b_n$，

因为 $$a_1=a=b_n$$

所以 $$a_2=c+\frac{k}{a_1+d}=c+\frac{k}{b_n+d}=b_{n-1},$$

$$a_3=c+\frac{k}{a_2+d}=c+\frac{k}{b_{n-1}+d}=b_{n-2},$$

$$\cdots$$

$$a_n=c+\frac{k}{a_{n-1}+d}=c+\frac{k}{b_2+d}=b_1.$$

故 $a_{n+1}=-d$. 所以 a 取数列$\{b_n\}$中的每一个数，都可得一有穷数列. 若 $c+d=0$，反设能得到项数为 $n+1$ 的有穷数列，则必有 $a_{n+1}=c+\dfrac{k}{a_n+d}=-d$，解得 $a_n=-\dfrac{k}{d+c}-d$，故 $c+d\neq0$ 与 $c+d=0$ 矛盾. 命题得证.

例 6 已知 $x_1=1$，$x_{n+1}=\sqrt{2x_n^4+6x_n^2+3}\,(n\geqslant1,n\in\mathbf{N}^*)$，求 x_n.

解 $\{x_n\}$的递推关系可化为 $x_{n+1}^2=2x_n^4+6x_n^2+3$.

令 $y_n=x_n^2$，则 $y_1=1$，$y_{n+1}=2y_n^2+6y_n+3=f(y_n)$，其中 $f(x)=2x^2+6x+3$. 解方程 $f(x)=x$，即 $2x^2+5x+3=0$，得 $f(x)$的两个不动点 $\alpha=-\dfrac{3}{2}$，$\beta=-1$.

所以 $$y_{n+1}-\left(-\frac{3}{2}\right)=2y_n^2+6y_n+\frac{9}{2}=2\left[y_n-\left(-\frac{3}{2}\right)\right]^2.$$

则 $$y_n+\frac{3}{2}=2\left(y_{n-1}+\frac{3}{2}\right)^2=2\cdot\left[2\left(y_{n-2}+\frac{3}{2}\right)^2\right]^2$$

$$=2^{1+2}\left(y_{n-2}+\frac{3}{2}\right)^{2^2}$$

$$=\cdots$$

$$=2^{1+2+\cdots+2^{n-2}}\left(y_1+\frac{3}{2}\right)^{2^{n-1}}$$

$$=2^{2^{n-1}-1}\left(y_1+\frac{3}{2}\right)^{2^{n-1}}=\frac{1}{2}\cdot5^{2^{n-1}}.$$

又由数学归纳法易证得 $x_n>0$，所以 $x_n=\sqrt{y_n}=\sqrt{\dfrac{1}{2}(5^{2^{n-1}}-3)}\,(n\in\mathbf{N}^*)$.



评析 一般地可以证明，如果 $\alpha=-\frac{b}{2a}$ 恰好是 $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq0)$ 的一个不动点，那么递推关系 $x_{n+1}=ax_n^2+bx_n+c$ 可转化为 $x_{n+1}-\alpha=a(x_n-\alpha)^2$

例9 已知数列 $\{a_n\}$ 是由非负整数组成的数列，满足 $a_1=0, a_2=3, a_{n+1}a_n=(a_{n-1}+2)\times(a_{n-2}+2), n=3,4,5,\cdots$，求 a_3。

分析 这是由递推公式给出数列的问题。一般来说，如果递推公式是相邻四项的关系，则必须已知一个初始项才能依次确定数列的各项，此题中只已知了两个初始项，这个数列能确定吗？

将 $n=3$ 代入得

$$a_4a_3=10. \tag{1}$$

题给递推式，即

$$\frac{a_{n-1}+2}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n-2}+2}{a_n}=1. \tag{2}$$

作标号变换，用 $n+1$ 代 n，得

$$\frac{a_n+2}{a_{n+2}}\cdot\frac{a_{n-1}+2}{a_{n+1}}=1. \tag{3}$$

由(2)，(3)知

$$\frac{a_n+2}{a_{n+2}}=\frac{a_{n-2}+2}{a_n}. \tag{4}$$

此式中令 $n=3$，得

$$\frac{a_3+2}{a_5}=\frac{a_1+2}{a_3},$$

即

$$\frac{5}{a_4}=\frac{2}{a_3}. \tag{5}$$

由(1)，(5)，解得 $a_3=2, a_4=5$（因为 $a_n\geqslant0$）。

据此，可知数列 $\{a_n\}$ 是确定的，那它的通项公式能求出来吗？下面给出几种解法。

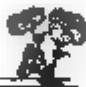
解法1 将 $a_2=3, a_3=2, a_4=5$ 代入题给递推关系式，得其前6项为

0，3，2，5，4，7

通过对前6项进行探究，发现其结果具有规律性，得出如下猜想，

$$a_n=\begin{cases}n-1, & n=2k-1,\\ n+1, & n=2k,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}^*$$

下面验证此猜想，代入递推公式验证如下：



当 n 是奇数时，左边 $=a_{n+1}a_n=(n+1+1)(n-1)=(n+2)(n-1)$，

右边 $=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2)=(n-1+1+2)(n-2-1+2)=(n+2)(n-1)$，

当 n 是偶数时，左边 $=a_{n+1}a_n=(n+1-1)(n+1)=n(n+1)$，

右边 $=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2)=(n-1-1+2)(n-2+1+2)=n(n+1)$

所以当 $n\in \mathbf{N}^*$ 时，$a_n=\begin{cases}n-1, & n=2k-1,\\ n+1, & n=2k,\end{cases}$ $k\in \mathbf{N}^*$ 均满足 $a_{n+1}a_n=(a_{n-1}+2)(a_{n-2}+2)$，即猜想满足题设条件.（归纳法证明略）

解法 2 由(4)可知数列 $\left\{\frac{a_n+2}{a_{n+2}}\right\}$ 是周期数列，以 2 为周期，所以

$$\frac{a_n+2}{a_{n+2}}=\frac{a_1+2}{a_3}=\frac{2}{2}=1,$$

即
$$a_{n+2}=a_n+2, \tag{6}$$

由(6)得
$$(a_{n+2}+a_{n+1})-(a_{n+1}+a_n)=2.$$

所以数列 $\{a_{n+1}+a_n\}$ 是公差为 2 的等差数列，$a_{n+1}+a_n=a_2+a_1+2(n-1)=2n+1$，两边同乘 $(-1)^{n+1}$，得 $(-1)^{n+1}a_{n+1}-(-1)^n a_n=(2n+1)(-1)^{n+1}$.

于是
$$\begin{aligned}(-1)^n a_n&=[(-1)^n a_n-(-1)^{n-1}a_{n-1}]+[(-1)^{n-1}a_{n-1}-(-1)^{n-2}a_{n-2}]+\cdots\\&\quad+[(-1)^2a_2-(-1)a_1]+(-1)a_1\\&=(2n-1)(-1)^n+(2n-3)(-1)^{n-1}+\cdots+3(-1)^2+0.\end{aligned}$$

所以
$$\begin{aligned}a_n&=(2n-1)-(2n-3)+\cdots+(2n-2k-1)(-1)^{k-1}+\cdots+3(-1)^{n-2}+0\\&=n+(-1)^n.\end{aligned}$$

解法 3 由(6)及 $a_1=0,a_2=3$，得

$$a_n=\begin{cases}n-1, & n\text{ 为奇数时},\\ n+1, & n\text{ 为偶数时}.\end{cases}\text{即 } a_n=n+(-1)^n.$$

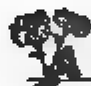
例 10 （2006 年全国高中数学联合竞赛加试题）已知无穷数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=x$，$a_1=y$，$a_{n+1}=\frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}$，$n=1,2,\cdots$.

(1) 对于怎样的实数 x 与 y，总存在正整数 n_0，使当 $n\geqslant n_0$ 时，a_n 恒为常数？

(2) 求通项 a_n.

解 (1)我们有

$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{a_na_{n-1}+1}{a_n+a_{n-1}}=\frac{a_n^2-1}{a_n+a_{n-1}}, n=1,2,\cdots, \tag{1}$$



所以，如果对某个正整数 n，有 $a_{n+1}=a_n$，则必有 $a_n^2=1$，且 $a_n+a_{n-1}\neq 0$. 如果 $n=1$，则

$$|y|=1 \text{ 且 } x\neq -y. \tag{2}$$

如果 $n>1$，

有 $$a_n-1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}-1=\frac{(a_{n-1}-1)(a_{n-2}-1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}, n\geq 2, \tag{3}$$

和 $$a_n+1=\frac{a_{n-1}a_{n-2}+1}{a_{n-1}+a_{n-2}}+1=\frac{(a_{n-1}+1)(a_{n-2}+1)}{a_{n-1}+a_{n-2}}, n\geq 2. \tag{4}$$

将(3)式和(4)式两端相乘，得

$$a_n^2-1=\frac{a_{n-1}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}\cdot\frac{a_{n-2}^2-1}{a_{n-1}+a_{n-2}}, n\geq 2. \tag{5}$$

由(5)递推，必有(2)式或

$$|x|=1 \text{ 且 } y\neq -x. \tag{6}$$

反之，如果条件(2)或(3)满足，则当 $n\geq 2$ 时，必有 $a_n=$常数，且常数是1或 -1.

(2) 由(3)式和(4)式得

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\frac{a_{n-1}-1}{a_{n-1}+1}\cdot\frac{a_{n-2}-1}{a_{n-2}+1}, n\geq 2. \tag{7}$$

记 $b_n=\frac{a_n-1}{a_n+1}$，则当 $n\geq 2$ 时，

$b_n=b_{n-1}b_{n-2}=(b_{n-2}b_{n-3})b_{n-2}=b_{n-2}^2b_{n-3}=(b_{n-3}b_{n-4})^2b_{n-3}=b_{n-3}^3b_{n-4}^2=\cdots$

由此递推，我们得到

$$\frac{a_n-1}{a_n+1}=\left(\frac{y-1}{y+1}\right)^{F_{n-1}}\cdot\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{F_{n-2}}, n\geq 2, \tag{8}$$

这里 $$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}, n\geq 2, F_0=F_1=1. \tag{9}$$

由式(9)解得 $$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]. \tag{10}$$

上式中的 n 还可以向负向延伸，如 $F_{-1}=0$，$F_{-2}=1$.

这样，(8)式对所有的 $n\geq 0$ 都成立. 由(8)式解得

$$a_n=\frac{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}+(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}{(x+1)^{F_{n-2}}(y+1)^{F_{n-1}}-(x-1)^{F_{n-2}}(y-1)^{F_{n-1}}}, n\geq 0. \tag{11}$$

(11)式中的 F_{n-1}，F_{n-2} 由(10)式确定.

例 11 (2005 年北京市高考理科卷试题) 设数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=a\neq\frac{1}{4}$，且



$$a_{n+1}=\begin{cases}\frac{1}{2}a_n, & n\text{为偶数},\\ a_n+\frac{1}{4}, & n\text{为奇数},\end{cases}$$

记 $b_n=a_{2n-1}-\frac{1}{4}, n=1,2,\cdots$.

(1) 求 a_2, a_3;

(2) 判断数列 $\{b_n\}$ 是否为等比数列,并证明你的结论;

(3) 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)$.

解 (1) $a_2=a_1+\frac{1}{4}=a+\frac{1}{4}, a_3=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{2}a+\frac{1}{8}$.

(2) 因为 $a_4=a_3+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}a+\frac{3}{8}$,所以 $a_5=\frac{1}{2}a_4=\frac{1}{4}a+\frac{3}{16}$,

所以 $b_1=a_1-\frac{1}{4}=a-\frac{1}{4}\neq 0, b_2=a_3-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}(a-\frac{1}{4})$.

猜想:数列 $\{b_n\}$ 是公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

证明如下:因为

$$\begin{aligned}b_{n+1}&=a_{2n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{2}a_{2n}-\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}(a_{2n-1}+\frac{1}{4})-\frac{1}{4}\\&=\frac{1}{2}(a_{2n-1}-\frac{1}{4})\\&=\frac{1}{2}b_n(n\in\mathbf{N}^*),\end{aligned}$$

且 $b_1=a-\frac{1}{4}\neq 0$,所以数列 $\{b_n\}$ 是首项为 $a-\frac{1}{4}$,公比为 $\frac{1}{2}$ 的等比数列.

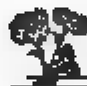
(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1+b_2+\cdots+b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_1(1-\frac{1}{2^n})}{1-\frac{1}{2}}=\dfrac{b_1}{1-\frac{1}{2}}=2(a-\frac{1}{4})$.

说明 分段型数列问题由于对不同范围的 n 值有不同的通项公式或递推公式,解决这类问题时应充分注意通项公式或递推公式的选取.

本题结论可推广到一般情形:

已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=M$,

$$a_n=\begin{cases}p_1a_{n-1}+r_1, \text{当 } n \text{ 为偶数时}, & (1)\\ p_2a_{n-1}+r_2, \text{当 } n \text{ 为奇数时}. & (2)\end{cases}$$



这里，M, p_1, p_2, r_1, r_2 为常数.

① 若 $p_1p_2=1$，则 $a_n=\begin{cases}\dfrac{p_2r_1+r_2}{2}n+M-\dfrac{p_2r_1+r_2}{2}, n \text{ 为奇数时}, \\ \dfrac{p_1r_2+r_1}{2}n+p_1(M-r_2), n \text{ 为偶数时}.\end{cases}$ ①

② 若 $p_1p_2\neq 1$，则 $a_n=\begin{cases}\left(M-\dfrac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}\right)(p_1p_2)^{\frac{n-1}{2}}+\dfrac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}, n \text{ 为奇数}; \\ \left(p_1M+r_1-\dfrac{p_1r_2+r}{1-p_1p_2}\right)(p_1p_2)^{\frac{n-2}{2}}+\dfrac{p_1r_2+r_1}{1-p_1p_2}, n \text{ 为偶数}.\end{cases}$ ②

证明 ① 当 n 为奇数时，

$$a_n=p_2a_{n-1}+r_2, \tag{3}$$

因 $n-1$ 为偶数，故由递推式(1)得

$$a_{n-1}=p_1a_{n-2}+r_1. \tag{4}$$

将(4)式代入(3)式，得 $a_n=p_2(p_1a_{n-2}+r_1)+r_2$，

即

$$a_n=p_1p_2a_{n-2}+p_2r_1+r_2. \tag{5}$$

若 $p_1p_2=1$ 由(5)式得

$$a_n-a_{n-2}=p_2r_1+r_2,$$

即 $a_1, a_3, a_5, \cdots, a_n$ 成等差数列且公差为 $p_2r_1+r_2$，项数为 $\frac{n+1}{2}$，

所以 $a_n=a_1+\left(\frac{n+1}{2}-1\right)(p_2r_1+r_2)=\frac{p_2r_1+r_2}{2}n+M-\frac{p_2r_1+r_2}{2}$

若 $p_1p_2\neq 1$，令

$$a_n=a_n'+\lambda(\lambda \text{ 为待定常数}) \tag{6}$$

将(6)式代入(5)式，得

$$a_n'+\lambda=p_1p_2(a_{n-2}'+\lambda)+p_2r_1+r_2,$$

即

$$a_n'=p_1p_2a_{n-2}'+(p_1p_2-1)\lambda+p_2r_1+r_2. \tag{7}$$

令 $(p_1p_2-1)\lambda+p_2r_1+r_2=0$，解得

$$\lambda=\frac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}. \tag{8}$$

此时(7)式变为 $a_n'=p_1p_2a_{n-2}'$，由此可知 $a_1', a_3', a_5', \cdots, a_n'$ 成等比数列，且公比为 $p_1p_2(\neq 1)$，项数为 $\frac{n+1}{2}$，由(6)式，(8)式



知 $$a_1' = a_1 - \frac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2} = M - \frac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}.$$

所以 $$a_n' = \left(M - \frac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}\right)(p_1p_2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

由(6)、(8)得

$$a_n = \left(M - \frac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}\right)(p_1p_2)^{\frac{n-1}{2}} + \frac{p_2r_1+r_2}{1-p_1p_2}$$

② 当 n 为偶数时，由(1)式得

$$a_n = p_1a_{n-1}+r_1. \tag{9}$$

因为 $n-1$ 为奇数，由(2)式得

$$a_{n-1} = p_2a_{n-2}+r_2. \tag{10}$$

将(10)式代入(9)式，得 $$a_n = p_1(p_2a_{n-2}+r_2)+r_1,$$

即 $$a_n = p_1p_2a_{n-2}+p_1r_2+r_1. \tag{11}$$

若 $p_1p_2=1$，则(11)式变为 $a_n-a_{n-2}=p_1r_2+r_1$，即 $a_2,a_4,a_6,\cdots,a_n$ 成等差数列，且公差为 $p_1r_2+r_1$，项数为 $\frac{n}{2}$. 由(9)式得 $a_2=p_1a_1+r_1=p_1M+r_1$，故得

$$a_n = p_1M+r_1+\left(\frac{n}{2}-1\right)(p_1r_2+r_1) = \frac{p_1r_2+r_1}{2}n+p_1(M-r_2).$$

若 $p_1p_2\neq1$，令

$$a_n = a_n'+\lambda\ (\lambda\text{为待定常数}). \tag{12}$$

将(12)式代入(11)式得 $a_n'+\lambda = p_1p_2(a_{n-2}'+\lambda)+p_1r_2+r_1$,

即 $$a_n' = p_1p_2a_{n-2}'+(p_1p_2-1)\lambda+p_1r_2+r_1. \tag{13}$$

令 $(p_1p_2-1)\lambda+p_1r_2+r_1=0$，解得

$$\lambda=\frac{p_1r_2+r_1}{1-p_1p_2}. \tag{14}$$

此时(12)式变为 $a_n'=p_1p_2a_{n-2}'$，由此易知 $a_2',a_4',a_6',\cdots,a_n'$ 成等比数列，且公比为 p_1p_2，项数为 $\frac{n}{2}$.

由(12)式、(14)式得 $$a_2'=a_2-\lambda=p_1M+r_1-\frac{p_1r_2+r_1}{1-p_1p_2}.$$

所以 $$a_n'=\left(p_1M+r_1-\frac{p_1r_2+r_1}{1-p_1p_2}\right)(p_1p_2)^{\frac{n-2}{2}}.$$



由(12)式,(14)式得

$$a_n=\left(p_1M+r_1-\frac{p_1r_2+r_1}{1-p_1p_2}\right)(p_1p_2)^{\frac{n-2}{2}}+\frac{p_1r_2+r_1}{1-p_1p_2}.$$

由此已证明①②式成立.

例 12 设数列 $\{a_n\}$,$n\geqslant 0$,满足 $a_0=0$,且 $a_{n+1}-2a_n=\begin{cases}1, & 3\mid n,\\ 4, & 3\mid(n-1),\\ -2, & 3\mid(n-2),\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}$,其中 $\mathbf{N}$ 为非负整数集,求其通项公式,以及前 $n+1$ 项和 S_n.

分析 下面利用单位根和常系数线性递推关系式的理论和方法解决此问题.

解 熟知 1 的 3 次方根 $1,\omega=e^{\frac{2\pi}{3}i},\omega^2=\bar{\omega}$($\omega$ 的共轭复数)有如下优雅的性质:

$$1^n+\omega^n+\omega^{2n}=\begin{cases}3, & 3\mid n,\\ 0, & 3\nmid n,\end{cases}\quad n\in\mathbf{N}. \tag{1}$$

利用(1)式,可将题给递推式改写为

$$\begin{aligned}&3(a_{n+1}-2a_n)\\ =&(1^n+\omega^n+\omega^{2n})+4[1^{n-1}+\omega^{n-1}+\omega^{2(n-1)}]+(-2)[1^{n-2}+\omega^{n-2}+\omega^{2(n-2)}],n\in\mathbf{N}.\end{aligned} \tag{2}$$

再化简为

$$a_{n+1}-2a_n=1-(1+2\omega)(\omega^n-\omega^{2n}),n\in\mathbf{N}. \tag{3}$$

令

$$a_n=b_n+P+Q\omega^n+R\omega^{2n},n\in\mathbf{N}, \tag{4}$$

其中 P,Q,R 为待定系数,以使下式成立:

$$b_{n+1}-2b_n=0,n\in\mathbf{N}. \tag{5}$$

把(4)式代入(3)式,易解得

$$P=-1,Q=\frac{-3+5\sqrt{3}i}{14},R=\frac{-3-5\sqrt{3}i}{14}.$$

$\{b_n\}(n\geqslant 0)$为等比数列,公比为 2,首项为 $b_0=a_0-P-Q-R=\frac{10}{7}$,通项为

$b_n=b_0\cdot 2^n=\frac{5}{7}\cdot 2^{n+1},n\in\mathbf{N}$. 代入(4)式得

$$a_n=\frac{1}{14}\left[5\cdot 2^{n+2}-14-(3-5\sqrt{3}i)\omega^n-(3+5\sqrt{3}i)\omega^{2n}\right],n\in\mathbf{N}.$$



也可表示为

$$a_n=\begin{cases}\frac{10}{7}(2^{3m}-1), & n=3m,\\ \frac{1}{7}(5\cdot 2^{3m+2}-13), & n=3m+1, n\in\mathbf{N},\\ \frac{1}{7}(5\cdot 2^{3m+3}+2), & n=3m+2,\end{cases}$$

$\{a_n\}(n\geqslant 0)$的前 10 项为

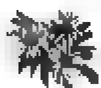
0,1,6,10,21,46,90,181,366,730.

且

$$S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n=\frac{1}{7}\left[5\cdot 2^{n+2}-7n-21+(2-\sqrt{3}i)\omega^{n+1}+(2+\sqrt{3}i)\omega^{2n+2}\right], n\in\mathbf{N},$$

也可表示为

$$S_n=\begin{cases}\frac{1}{7}(5\cdot 2^{3m+2}-21m-20), & n=3m,\\ \frac{1}{7}(5\cdot 2^{3m+3}-21m-33), & n=3m+1, n\in\mathbf{N}.\\ \frac{1}{7}(5\cdot 2^{3m+4}-21m-31), & n=3m+2.\end{cases}$$



能力训练

1. 数列$\{a_n\}$满足$a_na_{n-1}=a_{n-1}^2+(-1)^n(n\geqslant 2)$，且$a_1=1$，则$\frac{a_3}{a_5}$等于 (　　)

A. $\frac{16}{15}$　　B. $\frac{13}{12}$　　C. $\frac{1}{3}$　　D. $\frac{8}{3}$

2. (第 12 届"希望杯"高二竞赛题改编)图 2－8 中从左向右的 6 个点：1,2,3,4,5,6 的坐标对应数列$\{a_n, n\in\mathbf{N}\}$的前 12 项：

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}
x_1	y_1	x_2	y_2	x_3	y_3	x_4	y_4	x_5	y_5	x_6	y_6

则数列 a_n 的通项公式为 (　　)

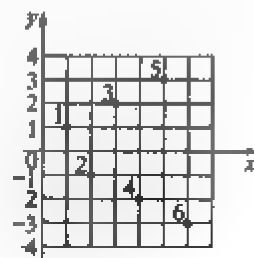


图 2－8

A. $a_n=\frac{n+1}{2}$

B. $a_n=\frac{n}{4}$



C. $a_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}, & n=1,3,5,\cdots\\ -\dfrac{n}{4}, & n=2,4,6,\cdots\end{cases}$

D. $a_n=\begin{cases}\dfrac{n+1}{2}, & n=1,3,5,\cdots\\ \dfrac{n+2}{4}, & n=2,6,10,\cdots\\ -\dfrac{n}{4}, & n=4,8,12,\cdots\end{cases}$

3. 方程 $f(x)=x$ 的根称为函数 $f(x)$ 的不动点. 若函数 $f(x)=\dfrac{x}{a(x+2)}$ 有惟一不动点, 且 $x_1=1000$, $x_{n+1}=\dfrac{1}{f\left(\dfrac{1}{x_n}\right)}$, $n=1,2,3,\cdots$, 则 x_{2008} 的值为 (　　)

A. 1000　　B. 2000

C. 2004　　D. 2008

4. 在由实数对组成的序列 $(1,1),(1,2),(2,1),(1,3),(2,2),(3,1),(1,4),(2,3),(3,2),(4,1),\cdots$ 可排成如下数表:

(1,1)
(1,2)　(2,1)
(1,3)　(2,2)　(3,1)
(1,4)　(2,3)　(3,2)　(4,1)
…

则第 100 个数对是 (　　)

A. (9,5)　　B. (13,1)　　C. (14,1)　　D. (9,6)

5. 数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\sqrt{a_n}+\dfrac{1}{4}$, 则 $a_{99}=$ (　　)

A. $2550\dfrac{1}{4}$　　B. 2500

C. $2450\dfrac{1}{4}$　　D. 2401

6. (2006 年全国高中数学联合竞赛(安徽省初赛)试题) 正数列满足 $a_1=1$, $a_2=10$, $a_n^2a_{n-2}=10_{n-1}^{3}$, $(n\geqslant 3)$, 则 $\lg(a_{100})=$ (　　)

A. 98　　B. 99　　C. 100　　D. 101

7.（第13届"希望杯"高一第1试第14题）已知数列$\{a_n\}$中，$a_{n+1}=\frac{a_n}{3a_n+1}$，且$a_3=\frac{1}{7}$，则$a_{2002}=$______

8.（第5届"希望杯"高二竞赛题）数列$\{a_n\}$中，$a_1=a(0<a<1)$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-a_n^2}}{2}}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$，则$\{a_n\}$的一个通项公式是$a_n=$______.

9.（2007年浙江省高中数学竞赛A卷试题）设$\{a_n\}$为$a_1=4$的单调递增数列，且满足$a_{n+1}^2+a_n^2+16=8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}a_n$，则$a_n=$______.

10.（2006年全国高中数学联合竞赛(江西省预赛)试题）数列$\{x_n\}$：1，3，3，3，5，5，5，5，5，…由全体正奇数自小到大排列而成，并且每个奇数k连续出现k次，$k=1,3,5,\cdots$，如果这个数列的通项公式为$x_n=a[\sqrt{bn+c}]+d$（$[\sqrt{bn+c}]$表示不超过$\sqrt{bn+c}$的最大整数），则$a+b+c+d=$______.

11. 数列$\{a_n\}$满足$a_1=19$，$a_2=98$，当$a_{n+1}\neq 0$时，$a_{n+2}=a_n-\frac{2}{a_{n+1}}$，当$a_{n+1}=0$时，$a_{n+2}=0$，$n\in \mathbf{N}^*$，则当$a_m=0$时，$m$的最小值为______.

12. 在数列$\{x_n\}$中，$x_1=3$，$x_2=2$，$x_n=\frac{x_{n-2}x_{n-1}}{2x_{n-2}-x_{n-1}}$ $(n\geqslant 3, n\in \mathbf{N}^*)$，则数列$\{x_n\}$的通项公式为______

13.（2005年重庆市高考文科卷试题）数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，且$8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0(n\geqslant 1)$，记$b_n=\frac{1}{a_n-\frac{1}{2}}(n\geqslant 1)$.

(1) 求b_1，b_2，b_3，b_4的值；

(2) 求数列$\{b_n\}$的通项公式及数列$\{a_nb_n\}$的前n项和S_n.

14.（第48届波兰数学奥林匹克最后一轮试题）正整数$x_1,x_2,\cdots,x_7$满足条件：$x_6=144$，且$x_{n+3}=x_{n+2}(x_{n+1}+x_n)$，$n=1,2,3,4$. 求$x_7$的值.

15. 已知$a_{n+1}=[(3a_n)^n+6^n-2^{n+1}]^{\frac{1}{n+1}}$，$a_1\geqslant 0$，求数列$\{a_n\}$的通项公式.

16.（2005年全国高中联合竞赛(辽宁省预赛)试题）已知$a_1=1$，$a_2=3$，$a_n=4a_{n-1}-a_{n-2}(n\geqslant 3)$；$b_1=1$，$b_2=3$，$b_n=\frac{b_{n-1}^2+2}{b_{n-2}}(n\geqslant 3)$；$c_1=1$，$c_{n+1}=2c_n+\sqrt{3c_n^2-2}(n\geqslant 3)$. 求证：对一切正整数$n$，有$a_n=b_n=c_n$.

17. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$，$a_1=1$，求数列$\{a_n\}$的通项公式



18. 如图2-9是某计算机的程序框图.

(1) 求打印出来的 x 的值;

(2) 求打印出来的 z 的值;

(3) 若将程序框图中的语句(9)"$n=2007$?"改为"$z\geqslant 1$?",则张三同学说这是死循环(即一直无限地算下去而没有结果),而李四说不会是死循环.你认为哪个同学说得正确?并说出你的理由.

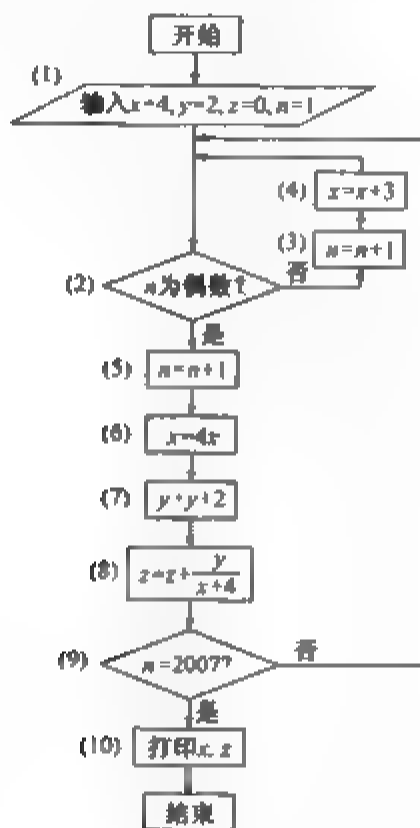


图2-9

19. 设 $a_1=1$, $a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}=a_{n+1}+\dfrac{1}{a_{n+2}}=a_{n+2}+\dfrac{1}{a_n}$ $(n=1,2,3,4,\cdots)$. 试求 $\sum\limits_{i=1}^{2007}(a_ia_{i+1}+1)\times(a_ia_{i+2}+1)$ 的值.

20. 设数列 $\{a_n\}(n\geqslant 0)$ 满足 $a_0=0$, 且 $a_{n+1}-3a_n=\begin{cases}3n^2+n-2, & 2\mid n,\\ -n^2-3n-4, & 2\nmid n,\end{cases}$ $n\in\mathbf{N}$. 求其通项公式,以及前 $n+1$ 项和 S_n.

4　含 a_n，S_n 的递推数列

知识扫描

(1) S_n 与 a_n 的关系

$$a_n=\begin{cases}S_1, & n=1\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2\end{cases}$$

当 $S_0=0$ 时，可统一写成 $a_n=S_n-S_{n-1}$.

(2) 含有 a_n，S_n 的递推关系式，当 $n\geqslant 2$ 时，既可用 S_n-S_{n-1} 替换 a_n，将关系式转化为关于 S_n，S_{n-1} 的递推式，也可递推相减，得到 S_n-S_{n-1} 后用 a_n 替换，转化为关于 a_n，a_{n-1} 的递推式求解. 如何转化要根据具体情况作具体分析.

例题分析

例 1　数列 $\{a_n\}$ 中，各项均为正数，且 $a_n+\frac{1}{a_n}=2S_n$，求数列的通项公式.

解　由已知得 $a_n(2S_n-a_n)=1$，而 $a_n=S_n-S_{n-1}(n\geqslant 2)$，可得 $(S_n-S_{n-1})\times(S_n+S_{n-1})=1$，即有 $S_n^2-S_{n-1}^2=1$，可知 $\{S_n^2\}$ 是公差为 1 的等差数列. 由已知等式可得 $S_1+\frac{1}{S_1}=2S_1$，故 $S_1^2=1$，因此 $S_n^2=n$.

由 $a_n>0$ 知 $S_n>0$，故 $S_n=\sqrt{n}$，因此得 $a_n=S_n-S_{n-1}=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\geqslant 2)$.

经检验，$a_1=1$ 也适合上式，故得通项公式为 $a_n=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}(n\in \mathbf{N}^*)$.

说明　题中条件 $a_i>0(i=1,2,\cdots)$ 不能缺少，否则结论不惟一. 由 $S_n^2=n$，将得出 $S_n=-\sqrt{n}$ 或 $S_n=\sqrt{n}$. 如 $1,-3,5,-7,\cdots$，满足 $S_{2n-1}=2n-1$，$S_{2n}=-2n$，也满足

$a_n+\dfrac{1}{a_n}=2S_n$,证略.

例2 (第17届"希望杯"培训题)已知函数 $f(x)=\dfrac{1}{2^{x-1}}$,数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=6-2a_n+f(n-1)$,试求数列$\{a_n\}$的通项公式 a_n.

解 因为 $f(x)=\dfrac{1}{2^{x-1}}$,所以 $f(n)=\dfrac{1}{2^{n-1}}$,$f(n-1)=\dfrac{1}{2^{n-2}}$.

又 $S_n=6-2a_n+f(n-1)=6-2a_n+\dfrac{1}{2^{n-2}}$.

所以 $a_1=6-2a_1+\dfrac{1}{2^{-1}}=8-2a_1$,解得 $a_1=\dfrac{8}{3}$.

当 $n\geqslant 2$ 时,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=\left(6-2a_n+\frac{1}{2^{n-2}}\right)-\left(6-2a_{n-1}+\frac{1}{2^{n-3}}\right)\\&=-2a_n+2a_{n-1}+\frac{4}{2^n}-\frac{8}{2^n}.\end{aligned}$$

故 $a_n=\dfrac{2}{3}a_{n-1}-\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{2^{n-1}}$,即 $a_n-4\times\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{2}{3}\left(a_{n-1}-4\times\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)$.

因此,数列$\left\{a_n-4\times\dfrac{1}{2^n}\right\}$是首项为$\left(a_1-4\times\dfrac{1}{2}\right)$,公比为$\dfrac{2}{3}$的等比数列.

所以
$$a_n-4\times\frac{1}{2^n}=\left(a_1-4\times\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1},$$

即
$$a_n=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{4}{2^n}(n\geqslant 2)\qquad(1)$$

又当 $n=1$ 时,$a_1=\dfrac{8}{3}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{4}{2}$,即当 $n=1$ 时,a_1 也满足(1)式.

故 a_n 的通项公式为 $a_n=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{4}{2^n}(n\in\mathbf{N}^*)$.

说明 在求数列通项时,应注意验证 a_1 是否符合所求的通项式

例3 设 S_n 为等差数列$\{a_n\}$的前 n 项之和,试问:是否存在常数 k,使得

$$ka_n^2-1=S_{2n}-S_{n+1}\qquad(1)$$

对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

解 因为$\{a_n\}$为等差数列,可设 $a_n=pn+q$(p,q 为常数),于是 $a_1=p+q$,且

$$S_n=\frac{n}{2}[(p+q)+(pn+q)]=\frac{p}{2}n^2+\left(q+\frac{p}{2}\right)n,$$

$$S_{2n}=2pn^2+(2q+p)n.$$

$$S_{n+1}=\frac{p}{2}(n+1)^2+\left(q+\frac{p}{2}\right)(n+1)$$

$$=\frac{p}{2}n^2+\left(q+\frac{3}{2}p\right)n+(p+q).$$

$$S_{2n}-S_{n+1}=\frac{3}{2}pn^2+\left(q-\frac{p}{2}\right)n-(p+q).$$

因此,(1) 式就是 $kp^2n^2+2kpqn+(kq^2-1)=\frac{3}{2}pn^2+\left(q-\frac{p}{2}\right)n-(p+q)$

为使上式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立,应有 $\begin{cases}kp^2=\frac{3}{2}p,\\ 2kpq=q-\frac{p}{2},\\ kq^2-1=-p-q.\end{cases}$

解得　$p=\frac{32}{27},q=-\frac{8}{27},k=\frac{81}{64}$.

所以,存在 $k=\frac{81}{64}$ 能使(1) 式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立.

例 4　(2006 年全国高考理科卷压轴题) 设数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,且方程 $x^2-a_nx-a_n=0$ 有一根为 S_n-1,$n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求 a_1,a_2;

(2) 求$\{a_n\}$的通项公式.

分析　利用 $a_n=S_n-S_{n-1}$ 可导出 $S_{n-1}S_n-2S_n+1=0$,猜想出 $S_n=\frac{n}{n+1}$,$n=1,2,3,\cdots$,再用数学归纳法证明. 利用 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geqslant 2,\end{cases}$ 再求出 a_n 的通项公式.

解　(1) 当 $n=1$ 时,$x^2-a_1x-a_1=0$,有一根为 $S_1-1=a_1-1$,于是

$$(a_1-1)^2-a_1(a_1-1)-a_1=0,$$

解得　$a_1=\frac{1}{2}$.

当 $n=2$ 时,$x^2-a_2x-a_2=0$,有一根为 $S_2-1=a_2-\frac{1}{2}$,于是



$$\left(a_2-\frac{1}{2}\right)^2-a_2\left(a_2-\frac{1}{2}\right)-a_2=0,$$

解得　$a_2=\frac{1}{6}$.

(2) 由题设 $(S_n-1)^2-a_n(S_n-1)-a_n=0$,

即
$$S_n^2-2S_n+1-a_nS_n=0, \tag{1}$$

当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}$ 代入上式得 $S_{n-1}S_n-2S_n+1=0$,由(1)式得

$$S_1=a_1=\frac{1}{2},S_2=a_1+a_2=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}=\frac{2}{3},S_3=\frac{3}{4}.$$

由此猜想出 $S_n=\frac{n}{n+1}$,$n=1,2,3,\cdots$.

下面用数学归纳法证明这个结论.

① 当 $n=1$ 时,已知结论成立.

② 假设当 $n=k$ 时结论成立,即 $S_k=\frac{k}{k+1}$,当 $n=k+1$ 时由(1)式得

$$S_{k+1}=\frac{1}{2-S_k}=\frac{1}{2-\frac{k}{k+1}}=\frac{k+1}{k+2},$$

即当 $n=k+1$ 时,结论也成立.

由①,②知,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 都有 $S_n=\frac{n}{n+1}$.

于是,当 $n\geqslant 2$ 时,

$$a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{n}{n+1}-\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

又当 $n=1$ 时,$a_1=\frac{1}{2}=\frac{1}{1\times 2}$ 也满足上式.

故
$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}(n\in\mathbf{N}^*).$$

说明　能否由递推式 $S_{n-1}S_n-2S_n+1=0(n\geqslant 2)$ 直接求出 $S_n=\frac{n}{n+1}$?回答是肯定的,我们可通过构造辅助数列来解决.

令 $T_n=\frac{1}{S_n-1}$,则 $S_n=\frac{1}{T_n}+1$,代入 $S_{n-1}S_n-2S_n+1=0(n\geqslant 2)$,得

$$\left(\frac{1}{T_{n-1}}+1\right)\left(\frac{1}{T_n}+1\right)-2\left(\frac{1}{T_n}+1\right)+1=0,$$

即
$$\frac{1}{T_nT_{n-1}}-\frac{1}{T_n}+\frac{1}{T_{n-1}}=0,$$

亦即
$$T_n-T_{n-1}=-1(n\geqslant 2).$$

所以$\{T_n\}$是首项为 $T_1=\frac{1}{S_1-1}=-2$,公差为 -1 的等差数列.

所以
$$T_n=-2-(n-1)=-(n+1).$$

故
$$S_n=\frac{1}{T_n}+1=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}(n\in \mathbf{N}^*).$$

下同基本思路.

例5 (2007年重庆市高考理科卷第21题)已知各项均为正数的数列$\{a_n\}$的前 n 项和 S_n 满足 $S_1>1$,且 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$,$n\in \mathbf{N}^*$.

(1) 求$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设数列$\{b_n\}$满足 $a_n(2^{b_n}-1)=1$,并记 T_n 为$\{b_n\}$的前 n 项和,求证:

$$3T_n+1>\log_2(a_n+3),n\in \mathbf{N}^*.$$

分析 (1) 先由 $6S_n=(a_n+1)(a_n+2)$ 取 $n=1$ 求出首项 a_1,再由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 求出 a_{n+1} 与 a_n 的关系式,最后由前两者得出数列$\{a_n\}$的通项公式.

(2) 应先根据 $a_n(2^{b_n}-1)=1$ 求出数列$\{b_n\}$的通项公式,然后写出 T_n 的表达式;而在证明 $3T_n+1>\log_2(a_n+3)(n\in \mathbf{N}^*)$ 时,可以考虑使用差值比较法、放缩变形法、数学归纳法.

解 (1) 结合问题条件,先由 $6a_1=(a_1+1)(a_1+2)$ 求得 $a_1=2$,再由 $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ 可得 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-3)=0$.由题意知 $a_{n+1}=-a_n$ 应舍去.

因此 $a_{n+1}-a_n=3$,故$\{a_n\}$是首项为2,公差为3的等差数列,故 $a_n=2+3(n-1)=3n-1$.

(2) 证法1 用放缩法

由 $a_n(2^{b_n}-1)=1$ 知

$$b_n=\log_2\left(1+\frac{1}{a_n}\right)=\log_2\frac{3n}{3n-1}=\log_2\left(1+\frac{1}{3n-1}\right),$$

进一步得
$$T_n=\log_2\left[\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)\right].$$

又当 $c>0$ 时,不等式 $(1+c)^3>1+3c$ 成立.



故

$$\begin{aligned}
&3T_n+1\\
&=\log_2\left[2\left(1+\frac{1}{2}\right)^3\left(1+\frac{1}{5}\right)^3\cdots\left(1+\frac{1}{3n-1}\right)^3\right]\\
&>\log_2\left[2\left(1+\frac{3}{2}\right)^3\left(1+\frac{3}{5}\right)\cdots\left(1+\frac{3}{3n-1}\right)\right]\\
&=\log_2\left(2\times\frac{5}{2}\times\frac{8}{5}\times\cdots\times\frac{3n+2}{3n-1}\right)\\
&=\log_2(3n+2)=\log_2(a_n+3).
\end{aligned}$$

证法 2 用数学归纳法.

① 当 $n=1$ 时，$3T_1+1=\log_2\frac{27}{4}$，$\log_2(a_1+3)=\log_2 5$，结论成立；

② 假设 $n=k$ 时结论成立，即 $3T_k+1>\log_2(a_k+3)$.

当 $n=k+1$ 时，

$$3T_{k+1}+1-\log_2(a_{k+1}+3)=\log_2\frac{(3k+3)^3}{(3k+5)(3k+2)^2},$$

因为 $(3k+3)^3-(3k+5)(3k+2)^2>0$，故上式大于 0，即

$$3T_{k+1}+1>\log_2(a_{k+1}+3).$$

由归纳原理，总有

$$3T_n+1>\log_2(a_n+3),n\in\mathbf{N}^*.$$

例 6 （2007 年四川省高中数学预赛试题）已知正整数列$\{a_n\}$满足条件：对于任意正整数 n，从集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中不重复地任取若干个数，这些数之间经过加减运算后所得的数的绝对值为互不相同的正整数，且这些正整数与 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 一起恰好是 1 至 S_n 全体自然数组成的集合，其中 S_n 为数列$\{a_n\}$的前 n 项和.

（1）求 a_1,a_2 的值；

（2）求数列$\{a_n\}$的通项公式.

解 （1）记 $A_n=\{1,2,\cdots,S_n\}$，显然 $a_1=S_1=1$. 对于 $S_2=a_1+a_2=1+a_2$，有

$$A_2=\{1,2,\cdots,S_2\}=\{1,a_2,1+a_2,|1-a_2|\}=\{1,2,3,4\}$$

故 $1+a_2=4$，所以 $a_2=3$.

（2）由题意知，集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$按上述规则，共产生 S_n 个正整数，而集合$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,a_{n+1}\}$按上述规则产生的 S_{n+1} 个正整数中，除 $1,2,\cdots,S_n$ 这 S_n 个正整数外，还有 $a_{n+1},a_{n+1}+i,|a_{n+1}-i|(i=1,2,\cdots,S_n)$，共 $2S_n+1$ 个数



所以 $$S_{n+1}=S_n+(2S_n+1)=3S_n+1.$$

因为 $S_{n+1}+\frac{1}{2}=3\left(S_n+\frac{1}{2}\right)$,

所以 $S_{n+1}=\left(S_1+\frac{1}{2}\right)\times 3^n-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\times 3^{n+1}-\frac{1}{2}$,

又因为当 $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=\left(\frac{1}{2}\times 3^n-\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}\times 3^{n-1}-\frac{1}{2}\right)=3^{n-1}$.

而 $a_1=1$ 也满足 $a_n=3^{n-1}$,所以,$a_n=3^{n-1}(n\geqslant 1)$.

例7 已知无穷数列$\{a_n\}$前 n 项的和 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$,试问满足题设的数列$\{a_n\}$有多少个?证明你的结论.

解 由 $S_n=\frac{1}{8}(a_n+2)^2$,得 $S_{n+1}=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2$,

故 $$S_{n+1}-S_n=\frac{1}{8}(a_{n+1}+2)^2-\frac{1}{8}(a_n+2)^2,$$

即 $$8a_{n+1}=a_{n+1}^2+4a_{n+1}-a_n^2-4a_n.$$

整理得 $$(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-4)=0.$$

故 $a_{n+1}+a_n=0$ 或 $a_{n+1}-a_n=4$.

在题设中,令 $n=1$,即 $a_1=\frac{1}{8}(a_1+2)^2$,得 $a_1=2$.

于是,数列$\{a_n\}$是以 2 为首项,公比为-1的等比数列,或者是公差为 4 的等差数列.

因此,满足题设的数列$\{a_n\}$有两个,其通项公式分别为 $a_n=2(-1)^{n-1}$或 $a_n=4n-2$.

说明 解答错了,错在哪里?反例如下: 令 $n=1$,得 $a_1=2$;令 $n=2$,得 $a_2=-2$ 或 $a_2=6$;令 $n=3$,由 $a_2=-2$,得 $a_3=2$,由 $a_2=6$,得 $a_3=-6$ 或 $a_3=10$.这样已得出至少有 3 个数列了,按照这种方法可以大胆预测:满足题设的数列$\{a_n\}$有无数个.

事实上,通过后面从特殊到一般的探究,可发现:"$a_{n+1}+a_n=0$ 或 $a_{n+1}-a_n=4$"中,$a_{n+1}+a_n=0$ 不一定对于任意 n 都成立,$a_{n+1}-a_n=4$ 亦然,即数列$\{a_n\}$不一定是等比数列,也不一定是等差数列.如列举前 4 项有:① 2,-2,2,-2,…;② 2,6,10,14,…;③ 2,-2,2,6,…;④ 2,6,-6,-2,…;⑤ 2,6,-6,6,…;⑥ 2,6,10,-10,….可见,满足题设的数列$\{a_n\}$有无数个.

例8 把正奇数数列$\{2n-1\}$中的数按上小下大、左小右大的原则排成如下三角形数表:



设 $a_{ij}(i,j\in \mathbf{N}^*)$ 是位于这个三角形数表中从上往下数第 i 行、从左往右数第 j 个数.

1
3 5
7 9 11
… … … …
… … … … …

(1) 若 $a_{mn}=2005$，求 m,n 的值；

(2) 已知函数 $f(x)$ 的反函数为 $f^{-1}(x)=8^n x^3(x>0)$，若记三角形数表中从上往下数第 n 行各数的和为 b_n，求数列 $\{f(b_n)\}$ 的前 n 项和 S_n.

解 (1) 因为三角形数表中前 m 行共有 $1+2+3+\cdots+m=\frac{m(m+1)}{2}$ 个数，

所以第 m 行最后一个数应当是所给奇数列中的第 $\frac{m(m+1)}{2}$ 项. 故第 m 行最后一个数是

$$2\cdot\frac{m(m+1)}{2}-1=m^2+m-1.$$

因此，使得 $a_{mn}=2005$ 的 m 是不等式 $m^2+m-1\geqslant 2005$ 的最小正整数解. 由 $m^2+m-1\geqslant 2005$，得 $m^2+m-2006\geqslant 0$，所以

$$m\geqslant\frac{-1+\sqrt{1+8024}}{2}>\frac{-1+\sqrt{7921}}{2}=\frac{-1+89}{2}=44.$$

所以 $m=45$.

于是，第 45 行第一个数是 $44^2+44-1+2=1981$，所以，$n=\frac{2005-1981}{2}+1=13$.

(2) 因为 $f^{-1}(x)=8^n x^3=y(x>0)$，所以 $x=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt[3]{y}$，故 $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\sqrt[3]{x}(x>0)$.

所以第 n 行最后一个数是 n^2+n-1，且有 n 个数，若将 n^2+n-1 看成第 n 行第 1 个数，则第 n 行各数成公差为 -2 的等差数列，故

$$b_n=n(n^2+n-1)+\frac{n(n-1)}{2}\cdot(-2)=n^3.$$

所以
$$f(b_n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdot\sqrt[3]{n^3}=n\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

故
$$S_n=\frac{1}{2}+2\left(\frac{1}{2}\right)^2+3\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

所以
$$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\left(\frac{1}{2}\right)^3+3\left(\frac{1}{2}\right)^4+\cdots+(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^n+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

两式相减得 $\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$=\frac{\frac{1}{2}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]}{1-\frac{1}{2}}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$=1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}-n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}.$$

所以
$$S_n=2-(n+2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n}.$$

评析 在数表中寻找递推关系，从研究第 n 项与第 $n-1$ 项的关系入手，通过观察数表，由特殊探索来归纳、猜想、证明出一般规律，这也是求解数表型数列问题的常用方法.

例 9 在各项均为正数的数列 $\{a_n\}$ 中，前 n 项和 S_n 满足

$$2S_n+1=a_n(2a_n+1),n\in\mathbf{N}^*.$$

(1) 证明 $\{a_n\}$ 是等差数列，并求这个数列的通项公式及前 n 项和的公式；

(2) 在 XOY 平面上，设点列 $M_n(x_n,y_n)$ 满足 $a_n=nx_n$，$S_n=n^2y_n$，且点列 M_n 在直线 C 上，M_n 中最高点为 M_1，若称直线 C 与 x 轴、直线 $x=a$，$x=b$ 所围成的图形的面积为直线 C 在区间 $[a,b]$ 上的面积，试求直线 C 在区间 $[x_3,x_1]$ 上的面积；

(3) 是否存在圆心在直线 C 上的圆，使得点列 M_n 中任何一个点都在该圆内部？若存在，求出符合题目条件的半径最小的圆；若不存在，请说明理由

解 (1) 由已知得

$$2S_n=2a_n^2+a_n-1,\tag{1}$$

故
$$2S_{n+1}=2a_{n+1}^2+a_{n+1}-1,\tag{2}$$

(2) 式 $-$ (1) 式得 $2a_{n+1}=2a_{n+1}^2-2a_n^2+a_{n+1}-a_n$

结合 $a_n>0$，得 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}$，故 $\{a_n\}$ 是等差数列.

又 $n=1$ 时，$2a_1=2a_1^2+a_1-1$，解得 $a_1=1$ 或 $a_1=-\frac{1}{2}$.

因为 $a_n>0$，所以 $a_1=1$. 又 $d=\frac{1}{2}$，故 $a_n=1+\frac{1}{2}(n-1)=\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}$，

所以
$$S_n=n+\frac{1}{2}\cdot\frac{n(n-1)}{2}=\frac{1}{4}n^2+\frac{3}{4}n$$

(2) 因为 $a_n=nx_n$，$S_n=n^2y_n$，所以 $x_n=\frac{a_n}{n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$，$y_n=\frac{S_n}{n^2}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}$ 即得点 $M_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}\right)$. 设 $x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}$，$y=\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}$，消去 n，得 $3x-2y-1=0$，即直线



C 的方程为 $3x-2y-1=0$. 又 $y=\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}$ 是 n 的减函数,所以 M_1 为 M_n 中的最高点,且 $M_1(1,1)$,又 M_3 的坐标为 $\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right)$,所以 C 与 x 轴,直线 $x=\frac{2}{3}$,$x=1$ 围成的图形为直角梯形. 从而直线 C 在 $\left[\frac{2}{3},1\right]$ 上的面积为:

$$S=\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}+1\right)\times\left(1-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{4}.$$

(3) 由于直线 C:$3x-2y-1=0$ 上的点列 M_n 依次为:

$$M_1(1,1),M_2\left(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\right),M_3\left(\frac{2}{3},\frac{1}{2}\right),\cdots,M_n\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n},\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}\right),\cdots,$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2},\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4n}\right)=\frac{1}{4}.$$

因此,点列 M_n 沿直线 C 无限接近于极限点 $M\left(\frac{1}{2},\frac{1}{4}\right)$.

又 $\frac{1}{2}|M_1M|=\frac{1}{2}\sqrt{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2+\left(1-\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{13}}{8}$,$M_1M$ 的中点为 $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\right)$,故满足条件的圆存在.

事实上,圆心为 $\left(\frac{3}{4},\frac{5}{8}\right)$,半径 $r\geqslant\frac{\sqrt{13}}{8}$ 的圆,就能使 M_n 中的任何一个点都在该圆的内部,其中半径最小的圆为 $\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\left(y-\frac{5}{8}\right)^2=\frac{13}{64}$.

例 10 (2006 年全国高中数学联合竞赛(江西省预赛)试题)数列 $\{a_n\}$ 满足:$a_0=1$,$a_n=\left[\sqrt{S_n}\right]$,$n=1,2,3,\cdots$,(其中 $[x]$ 表示 x 的整数部分,$S_k=\sum_{i=0}^{k}a_i$,$k=0,1,2,\cdots$),试求 a_{2006} 的值

解 观察数列开始的一些项:

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
a_n	1	1	1	1	2	2	2	3	3	4	4	4	5	5	6	6	7	7	8	8	8
S_n	1	2	3	4	6	8	10	13	16	20	24	28	33	38	44	50	57	64	72	80	88

我们注意到,数列 $\{a_n\}$ 严格单增,每个正整数 1,2,3,… 顺次在数列 $\{a_n\}$ 中出现,并且除了首项 $a_0=1$ 之外,每个形如 2^k,($k=0,1,2,\cdots$) 的数连续出现三次,其他数各连续出现两次.

一般地，我们可证明数列$\{a_n\}$的以下性质：

(1) $\forall k \in \mathbf{N}$，若记$m = 2^{k+1} + k + 1$，则$a_{m-2} = a_{m-1} = a_m = 2^k$，

(2) $\forall k \in \mathbf{N}^*$，若记$m_0 = 2^k + k$，则当$1 \leqslant r \leqslant 2^{k-1}$时，有

$$a_{m_0+2r-1} = a_{m_0+2r} = 2^{k-1} + r$$

对k归纳．据上面所列出的项可知，当$k \leqslant 2$时结论成立．设性质(1)、性质(2)对于$k \leqslant n$成立，即在$m = 2^{n+1} + n + 1$时，$a_{m-2} = a_{m-1} = a_m = 2^n$，则

$$S_m = a_0 + 2(1 + 2 + 3 + \cdots + 2^n) + (2^0 + 2^1 + \cdots + 2^n) = 2^{2n} + 3 \cdot 2^n$$

再对满足$1 \leqslant r \leqslant 2^n$的$r$归纳：

当$r = 1$时，由于$(2^n + 1)^2 < S_m < (2^n + 2)^2$，则$a_{m+1} = [\sqrt{S_m}] = 2^n + 1$，

因为 $$S_m < S_{m+1} = S_m + a_{m+1} = 2^{2n} + 4 \cdot 2^n + 1 < (2^n + 2)^2,$$

则 $$a_{m+2} = [\sqrt{S_{m+1}}] = 2^n + 1.$$

设当$r \leqslant p$时，均有$a_{m+2r-1} = a_{m+2r} = 2^n + r$，则当$r = p + 1 \leqslant 2^n$时，因为

$$\begin{aligned} S_{m+2p} &= S_m + (a_{m+1} + a_{m+2}) + (a_{m+3} + a_{m+4}) + \cdots + (a_{m+2p-1} + a_{m+2p}) \\ &= 2^{2n} + 3 \cdot 2^n + 2(2^n + 1) + 2(2^n + 2) + \cdots + 2(2^n + p) \\ &= 2^{2n} + (2p + 3) \cdot 2^n + p(p + 1) \end{aligned} \qquad (1)$$

则 $$S_{m+2p} - (2^n + p + 1) = 2^n - (p + 1) \geqslant 0,$$

$$(2^n + p + 2)^2 - S_{m+2p} = 2^n + 3p + 4 > 0,$$

即有 $$(2^n + p + 1)^2 \leqslant S_{m+2p} < (2^n + p + 2)^2,$$

所以 $$a_{m+2p+1} = [\sqrt{S_{m+2p}}] = 2^n + p + 1.$$

由于 $$\begin{aligned} S_{m+2p} < S_{m+2p+1} &= S_{m+2p} + a_{m+2p+1} \\ &= 2^{2n} + 2(p + 2) \cdot 2^n + p^2 + 2p + 1 < (2^n + p + 2)^2, \end{aligned}$$

所以 $$a_{m+2p+2} = [\sqrt{S_{m+2p+1}}] = 2^n + p + 1.$$

故由归纳法，当$m = 2^{n+1} + n + 1$，$1 \leqslant r \leqslant 2^n$时，$a_{m+2r-1} = a_{m+2r} = 2^n + r$．

特别当$r = 2^n$时，上式成为：

$$a_{2^{n+2}+n} = a_{2^{n+2}+n+1} = 2^{n+1} \qquad (2)$$

又由(1)式，$S_{m+2r} = 2^{2n} + (2r + 3) \cdot 2^n + r(r + 1)$，当$r = 2^n$，$m = 2^{n+1} + n + 1$，有

$S_{2^{n+2}+n+1} = 2^{2n} + (2n + 3) \cdot 2^n + 2^n(2^n + 1) = 2^{2n+2} + 2 \cdot 2^{n+1} < (2^{n+1} + 1)^2$，



所以 $$a_{2^{n+2}+n+2}=\left[\sqrt{S_{2^{n+2}+n+1}}\right]=2^{n+1}. \tag{3}$$

由式(2),式(3)可知,对于 $m=2^{k+1}+k+1$,当 $k=n+1$ 时,亦有 $a_{m-2}=a_{m-1}=a_m=2^k$,从而性质(1),性质(2)成立.

因为 $2^{10}+10<2006<2^{11}+11$,取 $m=2^{10}+10$,则 $k=9$,$r=\dfrac{2006-m}{2}=486$,

因此 $$a_{2006}=a_{m+2r}=2^9+r=512+486=998.$$

能力训练

1. 数列$\{a_n\}$的前 n 项和 $S_n=5^n+m$(m 为常数),下列结论正确的是 ( )

   A. $m\in\mathbf{R}$ 时,$\{a_n\}$是等比数列

   B. $m=-1$ 时,$\{a_n\}$是等比数列

   C. $m=0$ 时,$\{a_n\}$是等比数列

   D. 不论 m 为何值,$\{a_n\}$不可能为等比数列

2. 已知数列$\{x_n\}$满足:$x_1=a$,$x_2=b$,且 $x_{n+1}=x_n-x_{n-1}$($n\geqslant 2$),S_n 为数列前 n 项的和,则有 ( )

   A. $x_{100}=-a$,$S_{100}=2b-a$　　B. $x_{100}=-b$,$S_{100}=2b-a$

   C. $x_{100}=-b$,$S_{100}=b-a$　　D. $x_{100}=-a$,$S_{100}=b-a$

3. 如图 2-10,在杨辉三角中,斜线 l 的上方,从 1 开始沿箭头所示的数组成一个锯齿形数列:1,3,3,4,6,5,10,…,设该数列的前 n 项和为 S_n,则 S_{17} 的值为 ( )

   A. 172

   B. 217

   C. 228

   D. 283

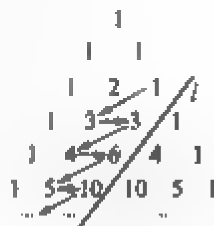


图 2-10

4. (2007 年湖北省高考理科卷试题)已知两等差数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的前 n 项和分别为 A_n 和 B_n,且 $\dfrac{A_n}{B_n}=\dfrac{7n+45}{n+3}$,则使得 $\dfrac{a_n}{b_n}$ 为整数的正整数 n 的个数是 ( )

   A. 2　　B. 3　　C. 4　　D. 5

5. (2006 年浙江省高中数学集训试题)已知数列$\{a_n\}$满足 $3a_{n+1}+a_n=4$($n\geqslant 1$),且 $a_1=9$,其前 n 项之和为 S_n,则满足不等式 $|S_n-n-6|<\dfrac{1}{125}$ 的最小整数 n 是 ( )

A. 5　　　　B. 6　　　　C. 7　　　　D. 8

6 (第14届"希望杯"高二竞赛题)数列$\{a_n\}$定义为：$a_1=\cos\theta$，$a_n+a_{n+1}=n\sin\theta+\cos\theta$，$(n\geqslant 1)$，则$S_{2n+1}$等于　　(　　)

A. $n\cos\theta+n(n+1)\sin\theta$　　　　B. $(n+1)\cos\theta+n(n+1)\sin\theta$

C. $(n+1)\cos\theta+(n^2+n-1)\sin\theta$　　　　D. $n\cos\theta+(n^2+n-1)\sin\theta$

7 (第9届"希望杯"高二竞赛题)数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，若$a_1=1$，且$S_n=n^2a_n$，则通项公式$a_n=$______，数列$\{a_n\}$的和为______

8. 数列$\{a_n\}$中，$a_1=1$，且$3(a_1+a_2+\cdots+a_n)=(n+2)\cdot a_n$，$(n=2,3,\cdots)$，则$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=$______.

9. (2007年浙江省高中数学竞赛B卷试题)已知数列$\{a_n\}$，$a_1=1$，前n项和S_n满足$S_n\sqrt{S_{n-1}}-S_{n-1}\sqrt{S_n}=2\sqrt{S_nS_{n-1}}$，则$a_n=$______.

10 (2004年全国高考理科卷第15题)已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=1$，$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geqslant 2)$，则$\{a_n\}$的通项$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ ______, & n\geqslant 2.\end{cases}$

11 (2007年浙江省高中数学竞赛A卷试题)设$N=2^{2012}$，则不超过$\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}$的最大整数为______.

12. (2005年浙江省数学竞赛试题)在x轴的正方向上，从左向右依次取点列$\{A_j\}$，$j=1,2,\cdots$，以及在第一象限内的抛物线$y^2=\frac{3}{2}x$上从左向右依次取点列$\{B_k\}$，$k=1,2,\cdots$，使$\triangle A_{k-1}B_kA_k(k=1,2,\cdots)$都是等边三角形，其中$A_0$是坐标原点，则第2005个等边三角形的边长是______.

13. 已知数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=2a_n-3\cdot 2^n+4$，$n=1,2,3,\cdots$.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 设T_n为数列$\{S_n-4\}$的前n项和，求T_n.

14 (2006年湖南省高中数学竞赛B卷试题)设$\{a_n\}$是正数数列，其前n项和S_n满足$S_n=\frac{1}{4}(a_n-1)(a_n+3)$

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 令$b_n=\frac{1}{S_n}$，试求$\{b_n\}$的前n项和T_n.

15 (2007年广州市高二数学竞赛试题)各项都为正数的数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，



已知 $2(S_n+1)=a_n^2+a_n$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(2) 若数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_1=2$, $b_{n+1}=2b_n$, 数列 $\{c_n\}$ 满足

$$c_n=\begin{cases}a_n, & n\text{ 为奇数},\\ b_n, & n\text{ 为偶数},\end{cases}$$

数列 $\{c_n\}$ 的前 n 项和为 T_n, 当 n 为偶数时, 求 T_n;

(3) 同学甲利用第(2)问中的 T_n 设计了一个程序, 如图 2-11, 但同学乙认为这个程序如果被执行的话会是一个"死循环"(即程序会永远循环下去, 无法结束). 你是否同意同学乙的观点? 请说明理由.

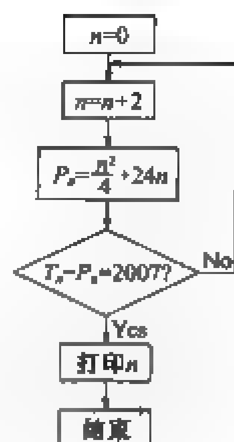


图 2-11

5　递推数列的性质



在由递推关系给出的数列的试题中，性质的论证是一大内容，主要探讨数列的单调性、有界性、周期性，以及数列中的项的整除性，或是否为奇数、偶数、整数等.

这类问题构思巧妙，解法灵活独特，思维跳跃性大，综合性强. 可从数列的基本性质如单调性、有界性、周期性等入手，并与数论的相关知识结合，力求融会贯通，化复杂为简单，分步求解.

(1) 单调性. 如果数列$\{a_n\}$满足：对任何正整数n，都有$a_n<a_{n+1}$ (或$a_{n+1}<a_n$)，则称$\{a_n\}$为单调递增(或减)数列；满足$a_n\leqslant a_{n+1}$ (或$a_{n+1}\leqslant a_n$)的数列$\{a_n\}$称为不减(或增)数列. 证明数列单调性的常用方法有作差或者作商比较法、数学归纳法等.

(2) 有界性. 对于数列$\{a_n\}$，如果存在常数M、N，使得对于一切正整数n，均有$M\leqslant a_n\leqslant N$，则称$\{a_n\}$为有界数列；如果存在一个常数$G$，使得$a_n\leqslant G$ ($a_n\geqslant G$) 对于一切正整数n成立，则称$\{a_n\}$为有上界(下界)(或者说是数列的最大值、最小值) 的数列，G为其一个上(下)界. 有界数列必有上、下界. 反之，不一定成立. 证明或判断数列的有界性，常用方法有放缩法和数学归纳法.

(3) 周期性. 如果数列$\{a_n\}$满足：存在正整数M、T，使得对一切大于M的正整数n，都有$x_{n+T}=x_n$成立，则称数列$\{a_n\}$是周期数列，T为它的一个周期.

若数列$\{a_n\}$是整数数列，m为正整数，记$a_n\equiv b_n \pmod m$，$(0\leqslant b_n\leqslant m-1)$，则称$\{b_n\}$为$\{a_n\}$的模数列，记为$\{a_n \pmod m\}$. 如果$\{a_n \pmod m\}$是周期数列，则称$\{a_n\}$是关于模$m$的周期数列，简称为模$m$周期数列. 数学竞赛中的周期数列大多以递推式给出的，因此常常用递推知识研究数列的周期性.

用递推式给出的数列，不要总想先求出它的通项公式，研究数列性质的不少问题，用递推关系比用通项公式更便利、高效.





例题分析

例 1 （2007 年全国高中数学联合竞赛试题）设 $a_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k(n+1-k)}$，求证：当正整数 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}<a_n$。

证明 因为
$$\frac{1}{k(n+1-k)}=\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{k}+\frac{1}{n+1-k}\right),$$
所以
$$a_n=\frac{1}{n+1}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}+1\right)\right]$$
$$=\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right).$$
即
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}=\frac{n+1}{2}a_n.$$
所以
$$a_{n+1}=\frac{2}{n+2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{2}{n+2}\left(\frac{n+1}{2}a_n+\frac{1}{n+1}\right).$$
于是
$$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{2}{n+2}\left(\frac{n+1}{2}a_n+\frac{1}{n+1}\right)$$
$$=\frac{1}{n+2}\left(a_n-\frac{2}{n+1}\right).$$
又
$$a_n=\frac{2}{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)>\frac{2}{n+1},$$
所以 $a_n-a_{n+1}>0$，即 $a_{n+1}<a_n(n\geqslant 2)$。

说明 本题还有如下的巧思妙解：

因为
$$a_n=\frac{1}{1\cdot n}+\frac{1}{2(n-1)}+\frac{1}{3(n-2)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 1},$$
$$a_{n+1}=\frac{1}{1\cdot(n+1)}+\frac{1}{2n}+\frac{1}{3(n-1)}+\cdots+\frac{1}{n\cdot 2}+\frac{1}{(n+1)\cdot 1},$$
所以
$$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\cdots$$



$$+\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}.$$

又 $\quad \frac{1}{1}>\frac{1}{n},\frac{1}{2}>\frac{1}{n},\frac{1}{3}>\frac{1}{n},\cdots,\frac{1}{n-1}>\frac{1}{n}$,

所以 $\quad a_n-a_{n+1}>\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)+\cdots+\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{n+1}$

$$=\frac{1}{n}\cdot\left(1-\frac{1}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}=0.$$

故 $\quad a_{n+1}<a_n(n\geqslant 2)$.

例 2 (2006 年北京市高考理科卷第 20 题) 在数列$\{a_n\}$中,若a_1,a_2是正整数,且$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$,$n=3,4,5,\cdots$,则称$\{a_n\}$为“绝对差数列”.

(1) 举出一个前 5 项不为零的“绝对差数列”(只要求写出前 10 项);

(2) 若“绝对差数列”$\{a_n\}$中,$a_{20}=3$,$a_{21}=0$,数列$\{b_n\}$满足$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}$,$n=1,2,3,\cdots$,分析判断当$n\to\infty$时,a_n与b_n的极限是否存在,如果存在,求出其极限值;

(3) 证明:任何“绝对差数列”中总含有无穷多个为零的项.

解 (1) $a_1=3,a_2=1,a_3=2,a_4=1,a_5=1,a_6=0,a_7=1,a_8=1,a_9=0,a_{10}=1$.(答案不惟一)

(2) 因为在绝对差数列$\{a_n\}$中,$a_{20}=3$,$a_{21}=0$,所以自第 20 项开始,该数列是$a_{20}=3,a_{21}=0,a_{22}=3,a_{23}=3,a_{24}=0,a_{25}=3,a_{26}=3,a_{27}=0,\cdots$,即自第 20 项开始,每 3 个相邻的项周期地取值 3,0,3,所以当$n\to\infty$时,a_n的极限不存在.

当$n\geqslant 20$时,$b_n=a_n+a_{n+1}+a_{n+2}=6$,所以$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=6$.

(3) 根据定义,数列$\{a_n\}$必在有限项后出现零项.证明如下:假设$\{a_n\}$中没有零项,由于$a_n=|a_{n-1}-a_{n-2}|$,所以对于任意的n,都有$a_n\geqslant 1$,从而

当$a_{n-1}>a_{n-2}$时,

$$a_n=a_{n-1}-a_{n-2}\leqslant a_{n-1}-1(n\geqslant 3);$$

当$a_{n-1}<a_{n-2}$时,

$$a_n=a_{n-2}-a_{n-1}\leqslant a_{n-2}-1(n\geqslant 3),$$

即a_n的值要么比a_{n-1}至少小 1,要么比a_{n-2}至少小 1.

令
$$c_n=\begin{cases}a_{2n-1}, & a_{2n-1}>a_{2n},\\ a_{2n}, & a_{2n-1}<a_{2n},\end{cases}\quad n=1,2,3,\cdots$$

则
$$0<c_n\leqslant c_{n-1}-1(n=2,3,4,\cdots).$$



由于 c 是确定的正整数，这样减少下去，必然存在某项 $c_k<0$，这与 $c_n>0(n=1,2,3,\cdots)$ 矛盾 从而 $\{a_n\}$ 必有零项.

若第 次出现的零项为第 n 项，记 $a_{n-1}=A(A\neq 0)$，则自第 n 项开始，每 3 个相邻的项周期地取值 $0,A,A$，即

$$\begin{cases}a_{n+3k}=0,\\a_{n+3k+1}=A,\quad k=0,1,2,3,\cdots\\a_{n+3k+2}=A,\end{cases}$$

所以绝对差数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个为零的项

说明 巧用数列的周期性，是本题获解的关键

用周期性解题的关键是去发现周期性 为什么要揭示周期性呢？因为利用它可以从部分看到全貌，从有限推测无穷. 对于一个项数较多甚至无限的数列，一旦发现具有某种周期性，就可以把问题归结到最初几项

例 3 (2007 年辽宁省高考理科卷第 21 题)已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 与函数 $f(x)$，$g(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 满足条件：$b_1=b$，$a_n=f(b_n)=g(b_{n+1})(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 若 $f(x)=tx+1(t\neq 0,t\neq 2)$，$g(x)=2x$，$f(b)\neq g(b)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，求 t 的取值范围，并求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$(用 t 表示)；

(2) 若函数 $y=f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的增函数，$g(x)=f^{-1}(x)$，$b=1$，$f(1)<1$，证明对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_{n+1}<a_n$.

分析 (1) 应先根据题目条件求出 a_n 的通项公式，具体方法有如下两种：一是直接根据 $a_n=f(b_n)=g(b_{n+1})$ 来求；二是先求 b_n 的通项公式，再由数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的关系去求 a_n 的通项公式，在这个基础上才能根据 a_n 的具体特征求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$；

(2) 从所证结论形式上看，可有两种证明方法：一是将其直接作差或者作商，用比较法来完成；二是用数学归纳法证明.

(1) **解法 1** 由题设知 $\begin{cases}a_{n+1}=tb_{n+1}+1,\\a_n=2b_{n+1}.\end{cases}$

解得
$$a_{n+1}=\frac{t}{2}a_n+1,$$

进一步得
$$a_{n+1}+\frac{2}{t-2}=\frac{t}{2}\left(a_n+\frac{2}{t-2}\right),$$

所以 $a_n+\dfrac{2}{t-2}$ 是首项为 $tb+\dfrac{t}{t-2}$，公比为 $\dfrac{t}{2}$ 的等比型数列，即知



$$a_n = \left(tb + \frac{t}{t-2}\right)\cdot\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} - \frac{2}{t-2},$$

最终求得
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{2}{2-t}.$$

解法 2 由题设知 $tb_n + 1 = 2b_{n+1}$，可得 $b_{n+1} + \frac{1}{t-2} = \frac{t}{2}\left(b_n + \frac{1}{t-2}\right)$.

由此可知 $\left\{b_n + \frac{1}{t-2}\right\}$ 是首项为 $b + \frac{1}{t-2}$，公比为 $\frac{t}{2}$ 的等比型数列，即得

$$b_n = \left(b+\frac{1}{t-2}\right)\left(\frac{t}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{t-2}.$$

由 $a_n = 2b_{n+1}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 2\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \frac{2}{2-t}$.

(2) 因为 $g(x) = f^{-1}(x)$，所以 $a_n = g(b_{n+1}) = f^{-1}(b_{n+1})$，即 $b_{n+1} = f(a_n)$，以下用数学归纳法证明 $a_{n+1} < a_n (n \in \mathbf{N}^*)$.

① 当 $n = 1$ 时，由 $f(x)$ 为增函数且 $f(1) < 1$，得 $a_1 = f(b_1) = f(1) < 1$，$b_2 = f(a_1) < f(1) < 1$，$a_2 = f(b_2) < f(1) < a_1$，结论成立.

② 假设当 $n = k$ 时，命题成立，即 $a_{k+1} < a_k$. 由 $f(x)$ 为增函数，得 $f(a_{k+1}) < f(a_k)$，即 $b_{k+2} < b_{k+1}$，进而可得 $f(b_{k+2}) < f(b_{k+1})$，即 $a_{k+2} < a_{k+1}$.

所以，对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，$a_{n+1} < a_n$.

例 4 （2005 年全国高中数学联合竞赛试题）数列 $\{a_n\}$ 满足

$$a_0 = 1, a_{n+1} = \frac{7a_n + \sqrt{45a_n^2 - 36}}{2}, n \in \mathbf{N}.$$

证明：

(1) 对任意 $n \in \mathbf{N}$，a_n 为正整数；

(2) 对任意 $n \in \mathbf{N}$，$a_n a_{n+1} - 1$ 为完全平方数.

解 (1) 由题设得 $a_1 = 5$，且 $\{a_n\}$ 严格单调递增. 将条件式变形为

$$2a_{n+1} - 7a_n = \sqrt{45a_n^2 - 36},$$

两边平方整理得

$$a_{n+1}^2 - 7a_n a_{n+1} + a_n^2 + 9 = 0. \tag{1}$$

由式(1) 得

$$a_n^2 - 7a_{n-1}a_n + a_{n-1}^2 + 9 = 0. \tag{2}$$

式(1) − 式(2)，得：$(a_{n+1} - a_{n-1})(a_{n+1} + a_{n-1} - 7a_n) = 0$.



又 $a_{n+1}>a_{n-1}$，所以 $a_{n+1}+a_{n-1}-7a_n=0$，即

$$a_{n+1}=7a_n-a_{n-1}. \tag{3}$$

由式(3)及 $a_0=1$，$a_1=5$ 可知，对任意 $n\in\mathbf{N}$，a_n 为正整数.

(2) 将式(1)配方得 $\quad (a_{n+1}+a_n)^2=9(a_{n+1}a_n-1)$，

即
$$a_na_{n+1}-1=\left(\frac{a_{n+1}+a_n}{3}\right)^2. \tag{4}$$

由式(3)得 $\qquad a_{n+1}+a_n=9a_n-(a_n+a_{n-1})$.

则 $\qquad a_{n+1}+a_n\equiv-(a_n+a_{n-1})\equiv\cdots\equiv(-1)^n(a_1+a_0)\equiv0\pmod 3$.

因此 $\frac{a_{n+1}+a_n}{3}$ 为整数，所以 $a_na_{n+1}-1$ 是完全平方数.

评析 本题通过平方化简得到一个较为简单的齐次线性递推式，既可以通过特征根法求通项，也可以结合整数的有关知识不求通项而直接研究数列的性质.在第(2)小题中，通过同余得到的结论也十分巧妙.

可见，要直接得到线性递推关系和非线性递推关系比较困难的数列，可以考虑另辟蹊径，构造新数列，探索导出新的递推关系式.

例5 (2008年上海市高考春季招生试题)在直角坐标平面 xOy 上的一列点 $A_1(1,a_1)$，$A_2(2,a_2)$，…，$A_n(n,a_n)$，…，简记为 $\{A_n\}$. 若由 $b_n=\overrightarrow{A_nA_{n+1}}\cdot\boldsymbol{j}$ 构成的数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_{n+1}>b_n$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 $\boldsymbol{j}$ 为方向与 y 轴正方向相同的单位向量，则称 $\{A_n\}$ 为 T 点列.

(1) 判断 $A_1(1,1)$，$A_2\left(2,\frac{1}{2}\right)$，$A_3\left(3,\frac{1}{3}\right)$，…，$A_n\left(n,\frac{1}{n}\right)$，…，是否为 T 点列，并说明理由；

(2) 若 $\{A_n\}$ 为 T 点列，且点 A_2 在点 A_1 的右上方. 任取其中连续的3点 A_k，A_{k+1}，A_{k+2}，判断 $\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 的形状(锐角三角形、直角三角形、钝角三角形)，并予以证明；

(3) 若 $\{A_n\}$ 为 T 点列，正整数 $1\leqslant m<n<p<q$ 满足 $m+q=n+p$，求证：

$$\overrightarrow{A_nA_q}\cdot\boldsymbol{j}>\overrightarrow{A_mA_p}\cdot\boldsymbol{j}.$$

解 (1) $a_n=\frac{1}{n}$，得 $b_n=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n}=\frac{-1}{n(n+1)}$，显然有 $b_{n+1}>b_n$，所以 $\{A_n\}$ 是 T 点列.

(2) 在 $\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 中，$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}=(-1,a_k-a_{k+1})$，$\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=(1,a_{k+2}-a_{k+1})$，$\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}=-1+(a_{k+2}-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})$.

因为点 A_2 在点 A_1 的右上方，所以 $b_1=a_2-a_1>0$.

又因为 $\{A_n\}$ 为 T 点列，所以 $b_k \geqslant b_1 > 0$，所以 $(a_{k+2}-a_{k+1})(a_k-a_{k+1})=-b_{k+1}b_k<0$，则 $\overrightarrow{A_{k+1}A_k}\cdot\overrightarrow{A_{k+1}A_{k+2}}<0$.

所以 $\angle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 为钝角，$\triangle A_kA_{k+1}A_{k+2}$ 为钝角三角形.

(3) **证明** 因为 $1\leqslant m<n<p<q$，$m+q=n+p$，

所以
$$q-p=n-m>0. \tag{1}$$

$$\begin{aligned}a_q-a_p&=(a_q-a_{q-1})+(a_{q-1}-a_{q-2})+\cdots+(a_{p+1}-a_p)\\&=b_{q-1}+b_{q-2}+\cdots+b_p\geqslant(q-p)b_p.\end{aligned} \tag{2}$$

同理
$$a_n-a_m=b_{n-1}+b_{n-2}+\cdots+b_m\leqslant(n-m)b_{n-1}. \tag{3}$$

由于 $\{A_n\}$ 为 T 点列，于是

$$b_p>b_{n-1} \tag{4}$$

由(1)式，(2)式，(3)式，(4)式可推得 $a_q-a_p>a_n-a_m$，所以 $a_q-a_n>a_p-a_m$，

即
$$\overrightarrow{A_nA_q}\cdot\vec{j}>\overrightarrow{A_mA_p}\cdot\vec{j}$$

例 6 设 a_n 为下述正整数 N 的个数：N 的各位数字之和为 n 且每位数字只能取 1，3 或 4. 求证：a_{2n} 是完全平方数，这里 $n=1,2,\cdots$.

证法 1 记集 A 为数码仅有 1，3，4 的数的全体，$A_n=\{N\in A, N$ 的各位数码之和为 $n\}$，则 $|A_n|=a_n$. 欲证 a_{2n} 是完全平方数，再记集 B 为数码仅有 1，2 的数的全体，

$B_n=\{N\in B, N$ 的各位数码之和为 $n\}$，令 $|B_n|=b_n$，下证 $a_{2n}=b_n^2$.

作映射 $f: B\to\mathbf{N}^*$，对于 $N\in B$，$f(N)$ 是由 N 按如下法则得到的一个数：把 N 的数码从左向右看，凡见到 2，把它与后面的一个数相加，用和代替，再继续看下去，直到不能做为止(例如 $f(1221212)=14132$，$f(21121221)=31341$). 易知 f 是单射，于是

$$f(B_{2n})=A_{2n}\cup A'_{2n}.$$

其中，$A'_{2n-2}=\{10k+2, k\in A_{2n-2}\}$. 所以 $b_{2n}=a_{2n}+a_{2n-2}$.

但 $b_{2n}=b_n^2+b_{n-1}^2$，这是因为 B_{2n} 中的数或是两个 B_n 中的数拼接而成，或是两个 B_{n-1} 中的数中间放 2 拼接而成. 所以 $a_{2n}+a_{2n-2}=b_n^2+b_{n-1}^2$ $(n\geqslant 2)$.

证法 2 设 $s=\overline{x_1x_2\cdots x_k}$，其中 $x_1,x_2,\cdots,x_k\in\{1,3,4\}$，且 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n$.

假定 $n>4$，删去 x_1 时，则当 x_1 依次取 1，3，4 时，$x_2+x_3+\cdots+x_k$ 分别等于 $n-1$，$n-3$，$n-4$. 故当 $n>4$ 时，

$$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}. \tag{1}$$

先用归纳法证明下式成立：

$$a_{2n+1}=a_{2n}+a_{2n-1}. \tag{2}$$



因 $a_1=a_2=1, a_3=2$，故当 $n=1$ 时，式(2)成立.

假设 $n=k$ 时式(2)成立，即 $a_{2k+1}=a_{2k}+a_{2k-1}$，则据式(1)，得

$$a_{2k+3}=a_{2k+2}+a_{2k}+a_{2k-1}=a_{2(k+1)}+a_{2(k+1)-1}.$$

可见式(2)对 $n=k+1$ 成立. 于是，式(2)对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

再用归纳法证明下式成立：

$$a_{2n}a_{2n+2}=a_{2n+1}^2. \tag{3}$$

因 $a_2=1, a_3=2, a_4=4$，故当 $n=1$ 时式(3)成立.

假设 $n=k$ 时式(3)成立，即 $a_{2k}a_{2k+2}=a_{2k+1}^2$，则据式(1)，式(2)得

$$\begin{aligned}a_{2k+2}a_{2k+4}&=a_{2k+2}(a_{2k+3}+a_{2k+1}+a_{2k})\\&=a_{2k+2}a_{2k+3}+a_{2k+2}a_{2k+1}+a_{2k+1}^2\\&=a_{2k+2}a_{2k+3}+a_{2k+1}a_{2k+3}\\&=a_{2k+3}^2.\end{aligned}$$

可见式(3)对 $n=k+1$ 成立. 故式(3)对于一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 成立.

最后再用归纳法证明本题结论. 显然 $n=1$ 时结论正确. 设 a_{2n} 是完全平方数，则由式(3)知 a_{2n+2} 是完全平方数. 因此结论对任意正整数 n 成立.

证法 3 同证法 2 可得递推关系式(1)：$a_n=a_{n-1}+a_{n-3}+a_{n-4}, (n>4)$.

作数列 $\{f_n\}$，$f_1=1, f_2=2$，且 $f_{n+2}=f_{n+1}+f_n, n\in\mathbf{N}^*$.

下面用归纳法证明下述两式成立：

$$a_{2n}=f_n^2, \tag{4}$$

$$a_{2n+1}=f_nf_{n+1}. \tag{5}$$

因 $a_2=1, a_3=2$，故当 $n=1$ 时式(4)，式(5)成立. 假定当 $n\leqslant k(k\geqslant 1)$ 时，式(4)，式(5)成立，则当 $n=k+1$ 时，据式(1)，$\{f_n\}$ 的定义以及归纳法假设，有

$$\begin{aligned}a_{2k+2}&=a_{2k+1}+a_{2k-1}+a_{2k-2}\\&=f_kf_{k+1}+f_{k-1}(f_k+f_{k-1})\\&=f_kf_{k+1}+f_{k-1}f_{k+1}\\&=f_{k+1}^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}a_{2k+3}&=a_{2k+2}+a_{2k}+a_{2k-1}\\&=f_{k+1}^2+f_k(f_k+f_{k-1})\\&=f_{k+1}f_{k+2}.\end{aligned}$$



这样式(4),式(5)对于 $n=k+1$ 成立,故式(4),式(5)对一切正整数成立. 由式(4)即知 a_{2n} 是完全平方数.

证法4 同证法2可得递推关系式(1): $a_n = a_{n-1} + a_{n-3} + a_{n-4}(n > 4)$

并且易知

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 4. \tag{6}$$

式(1)的特征方程为 $\lambda^4 - \lambda^3 - \lambda - 1 = 0$. 解得4个根为 $\pm i$, $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

因此式(1)的解为 $a_n = Ai^n + B(-i)^n + C\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + D\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$

利用初值(6),可得

$$a_n = \frac{2-i}{10}i^n + \frac{2+i}{10}(-i)^n + \frac{1}{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2} + \frac{1}{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+2}.$$

因此

$$\begin{cases} a_{2k} = \frac{1}{5}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right]^2, \\ a_{2k+1} = \frac{1}{5}\left[(-1)^k + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+3} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2k+3}\right]. \end{cases}$$

从而不难证明 $a_{2k}a_{2k+2} = a_{2k+1}^2$.

以下同证法1,知 a_{2n} 为完全平方数.

说明 函数的实质是映射. 本题证法1中构造了一个映射,使问题化繁为简,出奇制胜. 这是一个利用映射解题的精妙方法.

例7 已知数列$\{a_n\}$, $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_n = -a_{n-1} - 2a_{n-2}(n \geqslant 3)$. 求证: $2^{n+2} - 7a_n^2$ 是完全平方数.

证明 我们先证明一个引理.

引理: 若数列$\{a_n\}$满足

$$a_n = aa_{n-1} + ba_{n-2}(n \geqslant 3), \tag{1}$$

则数列$\{a_n^2\}$必满足

$$a_n^2 = (a^2+b)a_{n-1}^2 + b(a^2+b)a_{n-2}^2 - b^3a_{n-3}^2(n \geqslant 4).$$

引理的证明: 由式(1)得 $a_n^2 = a^2a_{n-1}^2 + 2aba_{n-1}a_{n-2} + b^2a_{n-2}^2$.

故 $$a_{n+1}^2 = a^2a_n^2 + 2aba_na_{n-1} + b^2a_{n-1}^2.$$

又因为 $ba_{n-2} = a_n - aa_{n-1}$, 所以 $b^2a_{n-2}^2 = a_n^2 - 2aa_na_{n-1} + a^2a_{n-1}^2$. 消去 a_na_{n-1},

得 $$a_{n+1}^2+b^3a_{n-2}^2=(a^2+b)a_n^2+(b^2+a^2b)a_{n-1}^2,$$

即 $$a_{n+1}^2=(a^2+b)a_n^2+b(a^2+b)a_{n-1}^2-b^3a_{n-2}^2.$$

即得(1)式成立，引理得证。

下面回到原题：

对于数列$\{a_n\}$，由引理得 $a_n^2=-a_{n-1}^2+2a_{n-2}^2+8a_{n-3}^2(n\geqslant 4)$.

设$b_n=2^{n+2}-7a_n^2$，则$a_n^2=\frac{2^{n+2}-b_n}{7}$，代入上式得出数列$\{b_n\}$的递推关系式

$$\frac{2^{n+2}-b_n}{7}=-\frac{2^{n+1}-b_{n-1}}{7}+\frac{2(2^n-b_{n-2})}{7}+\frac{8(2^{n-1}-b_{n-3})}{7}.$$

故 $$b_n=-b_{n-1}+2b_{n-2}+8b_{n-3}.$$

令$a^2+b=-1$，且$b(a^2+b)=2$，$-b^3=8$，解得$a=\pm 1$，且$b=-2$.

经计算：

$b_1=2^3-7a_1^2=4=2^2$，$b_2=2^4-7a_2^2=9=3^2$，$b_3=2^5-7a_3^2=25=(-5)^2$.

又因为$-5=-1\times 3-2\times 1$，取$a=-1$，所以$b_n=c_n^2$，其中$c_1=1$，$c_2=3$，$c_n=-c_{n-1}-2c_{n-2}(n\geqslant 3)$.

显然，c_n是整数，故$b_n=2^{n+2}-7a_n^2=c_n^2$是完全平方数.

评析 本题的关键是求出b_n的递推关系式，而b_n的递推关系式由引理推出。如果平时能多注意积累，做题时就可以将一些知识以引理形式出现，这样可帮助我们简化解题思路。

例8 (第3届北方数学奥林匹克邀请赛试题)在数列$\{a_n\}$中，$a_0=2007$，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}(n\in\mathbf{N})$.求证：当$0\leqslant n\leqslant 1004$时，有$[a_n]=2007-n$(其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数).

证明 先考虑一般问题：设$a_0>0$，$a_{n+1}=\frac{a_n^2}{a_n+1}$，求证：

$$[a_n]=a_0-n\left(0\leqslant n\leqslant \frac{1}{2}(a_0+2)\right).$$

对于任何正整数n，由递推公式知$a_n>0$.

由于$a_n-a_{n+1}=a_n-\frac{a_n^2}{a_n+1}=\frac{a_n}{1+a_n}>0$，所以有$a_0>a_1>a_2>\cdots>a_n>\cdots$

当n为正整数时，有：

$$a_n=a_0+\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{i-1})=a_0-\sum_{i=1}^{n}\frac{a_{i-1}}{1+a_{i-1}}=a_0-\sum_{i=1}^{n}\left(1-\frac{1}{1+a_{i-1}}\right)$$



$$= a_0 - n + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+a_{i-1}}\right) > a_0 - n.$$

另一方面，由于 $a_{n-1} > a_0 - (n-1)$，且 $a_0 > a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$

所以，$n=1$ 时，
$$\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{1+a_{i-1}} = \frac{1}{1+a_0} < 1,$$

$n \geqslant 2$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_{i-1}} < \frac{n}{1+a_{n-1}} \leqslant \frac{n}{a_0-n+2} \leqslant 1\text{（因为 } n \leqslant \frac{1}{2}(a_0+2)\text{，所以 } a_0-n+2 \geqslant n\text{）.}$$

总之
$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+a_{i-1}} < 1.$$

故有
$$a_n = a_0 - n + \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{1+a_{i-1}}\right) < a_0 - n + 1.$$

所以
$$[a_n] = a_0 - n.$$

取 $a_0 = 2007$，即得本题.

例 9 （1988 年全国数学联合竞赛试题）已知数列 $\{a_n\}$ 满足：

$$a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = \begin{cases} 5a_{n+1} - 3a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为偶数}, \\ a_{n+1} - a_n, & a_n \cdot a_{n+1} \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

试证明：对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，$a_n \neq 0$.

分析 1 由已知条件得到：$a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 7, a_4 = 29, a_5 = 22, a_6 = 23, \cdots$，可以发现 $a_1 \equiv a_4 \pmod 4$，$a_2 \equiv a_5 \pmod 4$，$a_3 \equiv a_6 \pmod 4$，因此只需证明：$a_{3k+i} \equiv a_i \pmod 4$，$i = 1,2,3$.

证明 设 $A_i = \{n \mid n = 4k + i, k \in \mathbf{Z}\}$，$i = 1,2,3$，$a_1 = 1 \in A_1$，$a_2 = 2 \in A_2$，$a_3 = 7 \in A_3$，假设 $a_{3m+1} \in A_1$，$a_{3m+2} \in A_2$，$a_{3m+3} \in A_3$，即 $a_{3m+1} = 4p + 1$，$a_{3m+2} = 4q + 2$，$a_{3m+3} = 4r + 3$，$(p,q,r \in \mathbf{Z})$，则有：

$$a_{3m+4} = 5a_{3m+3} - 3a_{3m+2} = 4(5r - 3q + 2) + 1 \in A_1,$$

$$a_{3m+5} = a_{3m+4} - a_{3m+3} = 4(4r - 3q + 1) + 2 \in A_2,$$

$$a_{3m+6} = 5a_{3m+5} - 3a_{3m+4} = 4(5r - 6q) + 3 \in A_3.$$

所以对一切的 $n \in \mathbf{N}^*$，有 $a_n \in A_1 \cup A_2 \cup A_3$，而 $0 \notin A_1 \cup A_2 \cup A_3$，所以 $a_n \neq 0$

分析 2 从奇偶性的角度来看，通过已知的递推关系也可以证明 a_n 不是 4 的倍数. 事实上由递推关系结合 $a_1 = 1, a_2 = 2$ 知道 a_n, a_{n+1}, a_{n+2} 的奇偶性只可能为：奇、偶、奇，偶、奇、奇；奇、奇、偶三种情况. 由 $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 7$ 均不是 4 的倍数，猜测 $\{a_n\}$ 中的所有



项都不是4的倍数.

下面用反证法来证明刚才的猜想.

证明　假设 a_m 是4的倍数,且 m 为最小下标($m>3$),则 a_{m-1},a_{m-2} 为奇数,a_{m-3} 为偶数.因为从 $a_m=5a_{m-2}-3a_{m-3}$,$a_m=a_{m-1}-a_{m-2}$ 知道 $3a_{m-3}=4a_{m-2}-a_m$,所以 a_{m-3} 也是4的倍数,这与假设矛盾.所以 a_n 不是4的倍数,对于一切 $n\in \mathrm{N}^*$,$a_n\neq 0$.

说明　加强命题并得到要证明的结论,是解决数学竞赛问题的一条有用的途径;在解决有些递推数列的性质问题的时候,如果求其通项比较困难,经常需要对递推关系和一些特殊的项进行分析、归纳、猜想,然后再来进行论证.

例10　(2007年全国高中数学联合竞赛(天津市预赛)试题)已知数列 $\{a_n\}(n\geqslant 0)$ 满足 $a_0=0$,$a_1=1$,对于所有正整数 n,有 $a_{n+1}=2a_n+2007a_{n-1}$,求使得 $2008\mid a_n$ 成立的最小正整数 n.

解法1　设 $m=2008$,$a_{n+1}=2a_n+2007a_{n-1}$ 的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-2007=0$,特征根为 $1\pm\sqrt{m}$,结合 $a_0=0$,$a_1=1$,得

$$a_n=\frac{1}{2\sqrt{m}}[(1+\sqrt{m})^n-(1-\sqrt{m})^n].$$

由二项式定理得 $a_n=\dfrac{1}{2\sqrt{m}}\left[\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k m^{\frac{k}{2}}-\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k m^{\frac{k}{2}}\right]$.

当 n 为奇数时,$a_n=C_n^1+C_n^3m+\cdots+C_n^{n-2}m^{\frac{n-3}{2}}+C_n^n m^{\frac{n-1}{2}}$;

当 n 为偶数时,$a_n=C_n^1+C_n^3m+\cdots+C_n^{n-3}m^{\frac{n-4}{2}}+C_n^{n-1}m^{\frac{n-2}{2}}$.

于是,$m\mid a_n\Leftrightarrow m\mid C_n^1$,即 $2008\mid n$.所以,满足条件的最小正整数为2008.

解法2　下面都是在模2008意义下的 a_n,则 $a_{n+1}\equiv 2a_n-a_{n-1}\pmod{2008}$,即

$$a_{n+1}-a_n\equiv a_n-a_{n-1}\pmod{2008}.$$

因此,数列 $\{a_n\}$ 在模2008意义下具有等差数列的特点.又因为 $a_0=0$,$a_1=1$,所以,$a_n\equiv n\pmod{2008}$.于是,$2008\mid n$.因此,满足条件的最小正整数为2008.

例11　数列 a_1,a_2,$\cdots$,定义如下:$a_n=2^n+3^n+6^n-1$,$n=1,2,3,\cdots$,求与此数列的每一项都互素的所有正整数.

解法1　我们先证明如下结论:对任意不小于5的素数 p,都有

$$2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv 0\pmod{p}\tag{1}$$

因为 p 是不小于5的素数,所以$(2,p)=1$,$(3,p)=1$,$(6,p)=1$,由费马小定理

$$2^{p-1}\equiv 1\pmod{p},3^{p-1}\equiv 1\pmod{p},6^{p-1}\equiv 1\pmod{p}$$



所以 $$3\cdot2^{p-1}+2\cdot3^{p-1}+6^{p-1}\equiv3+2+1=6\pmod p$$

即 $$6\cdot2^{p-2}+6\cdot3^{p-2}+6\cdot6^{p-2}\equiv6\pmod p$$

故 $$2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv0\pmod p$$

所以(1)式成立，于是 $a_{p-2}=2^{p-2}+3^{p-2}+6^{p-2}-1\equiv0\pmod p$.

又 $a_1=10$，$a_2=48$. 对任意大于1的正整数 n，它必有一个素因数 p. 若 $p\in\{2,3\}$，则 $(n,a_2)>1$；若 $p\geqslant5$，则 $(n,a_{p-2})>1$. 故大于1的正整数都不符合要求. 而1与所有正整数都互质，所以符合题设要求的正整数只能为1.

解法2 令 $b_n=a_n+1=2^n+3^n+6^n$，$n=-1,0,1,2,\cdots$，则 $b_0=3$，$b_{-1}=1$. 由特征根方法易知

$$b_{n+3}=11b_{n+2}-36b_{n+1}+36b_n,\ n=-1,0,1,\cdots \tag{2}$$

(设 $f(x)=(x-2)(x-3)(x-6)$，由 $2^nf(2)+3^nf(3)+6^nf(6)=0$ 可得上式)

对任一大于3的素数 p，有 $(p,6)=1$. 记 $\overline{m}$ 为整数 m 除以 p 的余数. 由于不同的3元组 $(\overline{m},\overline{m_1},\overline{m_2})$ 只有 p^3 个，由抽屉原理，必存在 i,j，$-1\leqslant i<j$，使得 $(\overline{b_i},\overline{b_{i+1}},\overline{b_{i+2}})=(\overline{b_j},\overline{b_{j+1}},\overline{b_{j+2}})$，则

$$36b_{i-1}\equiv b_{i+2}-11b_{i+1}+36b_i\equiv b_{j+2}-11b_{j+1}+36b_j\equiv36b_{j-1}\pmod p,$$

$$p\mid36(b_{i-1}-b_{j-1})\Rightarrow p\mid(b_{i-1}-b_{j-1})\Rightarrow(\overline{b_{i-1}},\overline{b_i},\overline{b_{i+1}})=(\overline{b_{j-1}},\overline{b_j},\overline{b_{j+1}}).$$

依此类推，可得 $(\overline{b_{-1}},\overline{b_0},\overline{b_1})=(\overline{b_{j-i-1}},\overline{b_{j-i}},\overline{b_{j-i+1}})$.

特别地，$b_{j-i-1}\equiv b_{-1}=1\pmod p$. 从而，$p\mid b_{j-i-1}-1\Rightarrow p\mid a_{j-i-1}$.

若 $j-i-1=0$，则 $a_0=2$，$p\mid2$，矛盾. 故 $j-i-1\geqslant1$. 又因为 $a_2=48$，所以与此数列的每一项都互素的正数只有1.

推广 我们常称题中的 a_n 为幂和式. 幂和式(特别是2项幂和式)是数学竞赛的常客.

(1) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下：$a_n=2^n+4^n+7^n+14^n+28^n-1$，$n=1,2,3,\cdots$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,7,7^2,7^3,\cdots$.

因为对任一不等于2和7的素数 p，有 $(p,28)=1$，由费马小定理得

$$\begin{aligned}28a_{p-2}&=14\cdot2^{p-1}+7\cdot4^{p-1}+4\cdot7^{p-1}+2\cdot14^{p-1}+28^{p-1}-28\\&\equiv14\cdot1+7\cdot1+4\cdot1+2\cdot1+1-28\equiv0\pmod p.\end{aligned}$$

所以，$p\mid28a_{p-2}\Rightarrow p\mid a_{p-2}$. 又因为 $2\mid a_1$，且易得 $7\nmid a_n$，所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $7^k(k=0,1,2,\cdots)$.



进一步推广可得：

(2) 设 p 为素数，$q=2^p-1$ 也为素数（麦森素数），则 $W=2^{p-1}(2^p-1)$ 为完全数。数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下：

$$a_n=2^n+2^{2n}+2^{3n}+\cdots+2^{(p-1)n}+q^n+(2q)^n+(2^2q)^n+\cdots+(2^{p-1}q)^n-1,n=1,2,3,\cdots$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,q,q^2,q^3,\cdots(p\geqslant 3)$ 或 $1(p=2)$。

对 $p=2$（原题）和 $p=3$（推广(1)）命题已证。对 $p\geqslant 3$ 的一般情形，设 D 为任一不等于 2 和 q 的素数，则 $(D,W)=1$。由费马小定理得

$$\begin{aligned}Wa_{p-2}&=\sum_{i=1}^{p}(2^{p-1}q)2^{i(p-2)}+\sum_{i=0}^{p-1}(2^{p-1})(2^iq)^{p-2}-W\\&\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{p-1-i}q+\sum_{i=0}^{p-1}2^{p-1-i}-W\\&=(2^{p-1}-1)q+(2^p-1)-W\equiv 0(\bmod D),\end{aligned}$$

$D\mid Wa_{p-2}\Rightarrow D\mid a_{p-2}$。又因为 $2\nmid a_n$，且 $a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1=\dfrac{2^{pn}-1}{2^n-1}-1(\bmod q)$，

若 $p\nmid n$，则 $(p,n)=1$，且 $(2^n-1,q)=(2^n-1,2^p-1)=1$，

从而 $\quad 2^{pn}-1\equiv 0(\bmod q)\Rightarrow\dfrac{2^{pn}-1}{2^n-1}\equiv 0(\bmod q)\Rightarrow a_n\equiv -1\not\equiv 0(\bmod q)$。

若 $p\mid n$，则 $a_n\equiv\sum_{i=1}^{p-1}2^{in}-1\equiv\sum_{i=1}^{p-1}1-1=p-2\not\equiv 0(\bmod q)$。

因为 $q\nmid a_n,n=1,2,\cdots$，推广命题得证。

(3) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下：

$$a_n=3^n+3\cdot 5^n+15^n-1,n=1,2,3,\cdots.$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1,3,3^2,3^3,\cdots$

因为对任一不等于 3 和 5 的素数 p，有 $(p,15)=1$，由费马小定理得

$$\begin{aligned}15a_{p-2}&=5\cdot 3^{p-1}+3^2\cdot 5^{p-1}+15^{p-1}-15\\&\equiv 5\cdot 1+3^2\cdot 1+1-15\equiv 0(\bmod p),\end{aligned}$$

$$p\mid 15a_{p-2}\Rightarrow p\mid a_{p-2}.$$

又因为 $3\nmid a_n$，$5\mid a_1$，所以与此数列的每一项都互素的正整数只有 $3^k(k=0,1,2,\cdots)$

(4) 数列 $a_1,a_2,\cdots$ 定义如下：

$$a_n=2^n+3^n+7^n+42^n-1,n=1,2,\cdots$$



则与此数列的每一项都互素的正整数只有形如 $2^l \cdot 3^m \cdot 7^k$（l, m, k 为非负整数）的所有正整数.

（5）数列 $a_1, a_2, \cdots$ 定义如下：

$$a_n = 2^n + 3^n + 7^n + 43^n + 1806^n - 1, n = 1, 2, \cdots.$$

则与此数列的每一项都互素的正整数只有 $1, 43, 43^2, \cdots$. 证明同上.

能力训练

1.（2006 年全国高中数学联合竞赛（山西省预赛）试题）已知数列 a_n ($n \geqslant 1$) 满足 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$，且 $a_2 = 1$，若数列的前 2005 项之和为 2006，则前 2006 项的和等于 （　）

A. 2005　　B. 2006　　C. 2007　　D. 2008

2. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2, a_{n+1} = -\dfrac{1}{a_n + 1}$，则 a_{2007} 等于 （　）

A. $-\dfrac{3}{2}$　　B. $-\dfrac{1}{3}$　　C. 1　　D. 2

3.（第 13 届“希望杯”竞赛试题）等差数列 $\{a_n\}$ 中，已知 $3a_8 = 7a_{13}$，且 $a_1 < 0$，则前 n 项和 S_n ($n \in \mathbf{N}^*$) 中的最小值是 （　）

A. S_7 或 S_8　　B. S_{12}　　C. S_{11}　　D. S_{16}

4.（2007 年湖南省高考理科卷试题改编）将杨辉三角中的奇数换成 1，偶数换成 0，得到如图 2-12 所示的 0～1 三角数表. 从上往下数，第 1 次全行的数都为 1 的是第 1 行，第 2 次全行的数都为 1 的是第 3 行，…，第 n 次全行的数都为 1 的是第 x 行；第 61 行中的 1 的个数是 y 个，则 x, y 的值分别为 （　）

A. n, 61　　B. 2^n, 64

C. $2^n - 1$, 61　　D. $2^n - 1$, 32

第1行	1 1
第2行	1 0 1
第3行	1 1 1 1
第4行	1 0 0 0 1
第5行	1 1 0 0 1 1
……	…

图 2-12

5. 在正整数集上定义的函数 $f(n) = \begin{cases} n - 3, & n \geqslant 1000, \\ f[f(n+7)], & n < 1000. \end{cases}$

则 $f(90)$ 的值为 （　）

A. 997　　B. 998　　C. 999　　D. 1000

6. 设 $a_1 = 6, a_{n+1} = \left[\dfrac{5}{4}a_n + \dfrac{3}{4}\sqrt{a_n^2 - 12}\right]$ ($n \in \mathbf{N}^*$)，其中，$[x]$ 表示 x 的整数部分，



则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2006}$ 的个位数字为 （　　）

A. 1　　B. 3　　C. 5　　D. 7

7. 设 $a_n=(1+\sqrt{2})^n$，$[A]$ 表示不超过 A 的最大整数，则数列 $[a_1],[a_2],\cdots,[a_n],\cdots$ 的特征是______

8. 数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_2=2,a_3=-4,a_n=a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}$，则 $a_1+a_2+\cdots+a_{2002}=$______.

9. 求实数 a_0 的集合，使得由 $a_{n+1}=2^n-3a_n,n=0,1,2,\cdots$ 定义的无限序列 $\{a_n\}$ 是严格增加的，即对于 $n\geqslant 0$，有 $a_n<a_{n+1}$，则所求的集合为______

10. （第 15 届"希望杯"高二竞赛题）已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1,a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$，则 $a_{2006}=$______.

11. 若一个序列 $a_0,a_1,\cdots$，它的每一项均为正数，$a_0=1$，并且 $a_n-a_{n+1}=a_{n+2}$ $(n=0,1,2,\cdots)$，则这样的序列有______个.

12. （2006 年全国高中数学联合竞赛（江苏省赛区）初赛试题）等比数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1=2020$，公比 $q=-\dfrac{1}{2}$，设 $f(n)$ 表示该数列的前 n 项的积，则当 $n=$______时，$f(n)$ 有最大值.

13. （第 23 届美国数学奥林匹克试题）设 $k_1<k_2<k_3<\cdots$ 是一列正整数，且 $k_{i+1}-k_i>1$，$i=1,2,\cdots$，令 $S_m=k_1+k_2+\cdots+k_m$，$m=1,2,\cdots$，证明：对每一个正整数 n，在区间 $[S_n,S_{n+1})$ 中有一个完全平方数.

14. 证明：已知 $a_1=a_2=a_3=1$，且 $a_{n+1}=\dfrac{1+a_na_{n-1}}{a_{n-2}}$ $(n\geqslant 3)$，则 a_n 都是整数.

15. （2007 年江苏省高中数学奥林匹克冬令营测试题）已知数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_0=2$，$b_1=10$，$b_{n+2}=6b_{n+1}-b_n$，求证：b_n 可以写成 2 个整数的平方和的形式.

16. 数列 $\{x_n\}$ 定义如下：$x_1=1,x_2=k$，当 $n\geqslant 2$ 时，$x_{n+1}=\dfrac{x_n^2-1}{x_{n-1}}$，其中 k 为给定的整数，求证：$x_1+x_3+\cdots+x_{2m-1}$ $(m\in\mathbf{N}^*)$ 是完全平方数.

17. （2005 年上海市高中数学竞赛试题）数列 $\{f_n\}$ 的通项公式为

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],n\in\mathbf{N}^*.$$

记 $S_n=C_n^1f_1+C_n^2f_2+C_n^nf_n$，求所有的正整数 n，使得 S_n 能被 8 整除.

18. （第 48 届波兰数学奥林匹克试题）数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 定义为

$$a_1=0,a_n=a_{\left[\frac{n}{2}\right]}+(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}},n>1.$$

（$\left[\frac{n}{2}\right]$ 表示不超过$\frac{n}{2}$的最大整数]）对每一个整数 $k\geqslant 0$，求满足条件 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$，$a_n=0$ 的下标 n 的个数.

19 （2005 年中国数学奥林匹克协作体夏令营测试题）求证：存在惟一的正整数列 $a_1,a_2,a_3,\cdots$ 使得 $a_1=1,a_2>1,a_{n+1}(a_{n+1}-1)=\frac{a_na_{n+2}}{\sqrt[3]{a_na_{n+2}-1}+1}-1(n=1,2,3,\cdots)$

20. 设正实数序列 $x_0,x_1,x_2,\cdots,x_{1995}$ 满足条件：

(1) $x_0=x_{1995}$；

(2) 对 $i=1,2,\cdots,1995$，有 $x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}=2x_i+\frac{1}{x_i}$，求 x_0 的最大值.



6　递推数列的极限

知识扫描

1. 求递推数列极限的基本思路.

(1) 先求出数列的通项公式,转化为$\frac{1}{n^a}(a>0)$与$q^n(|q|<1)$的极限.

(2) 在已知极限存在的前提下,可直接在递推式中取极限,再解关于极限的方程.

2. 求极限的几个注意点.

(1) 运用极限运算法则,要注意法则只适用于"有限个"且"有极限"的情形,遇到和、积式求极限,应先求和、积再求极限.

(2) 数列前n项的和S_n与各项和$S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n$的区别.若$\{a_n\}$为等比数列,且$|q|<1$,则$S=\frac{a_1}{1-q}$.

3. 稳定性

数列极限反映事物变化过程中呈现的一种变化趋势——稳定性,可以解释经济现象中的某种规律,揭示事物变化的本质.在近几年的高考数学应用问题中应用了极限思想,成为一个新亮点.

例题分析

例1　用记号"$\oplus$"表示求两个实数a与b的算术平均数的运算,即$a\oplus b=\frac{a+b}{2}$.已知数列$\{x_n\}$满足$x_1=0,x_2=1,x_n=x_{n-1}\oplus x_{n-2}(n\geq3)$,则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$　　(　　)

A. 0　　B. $\frac{1}{2}$　　C. $\frac{2}{3}$　　D. 1

分析　求数列的极限,可以借助数列的直观解释,即在线段上描出几个点,观察x_n的



图 2-13

变化趋势，即可推测出结果，注意到 $x_n=x_{n-1}\oplus x_{n-2}$ 的几何意义是：x_n 是有向线段 $x_{n-1}x_{n-2}$ 的中点，由图 2-13 可知，x_5 离 $\frac{2}{3}$ 最近，以后越来越近，故选 C.

说明 这是选择题的做法，也是我们理解极限概念最朴素最直观的方法，但解答题的做法不同.

如果是解答题，一般先构造 $a_n=x_{n+1}-x_n$，再求 $\{a_n\}$ 的通项，得 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，从而判断 x_n 是以 1 为首项，$\left(-\frac{1}{2}\right)$ 为公比的等比数列的前 $(n-1)$ 项的和，最后求出它们的极限.

这里的关键是构造等比数列 $\{a_n\}$：由图 2-13 不难知道，每做一个分点，都把它之前的两分点构成的线段二等分，这就产生了数量比为 $-\frac{1}{2}$ 的一串有向线段，从而想到构造 a_n.

解法 1 由 $x_{n+2}=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)$ 得

$$
\begin{aligned}
x_{n+2}-x_{n+1}&=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)\\
&=\left(-\frac{1}{2}\right)^2(x_n-x_{n-1})\\
&=\cdots\\
&=\left(-\frac{1}{2}\right)^n(x_2-x_1)=\left(-\frac{1}{2}\right)^n.
\end{aligned}
$$

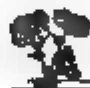
由此推出 $x_n-x_{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，$x_{n-1}-x_{n-2}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-3}$，$\cdots$，$x_2-x_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^0$.

诸式相加得 $x_n=\left[1+\left(-\frac{1}{2}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right]+x_1$，

$$x_n=\frac{\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}{1+\frac{1}{2}}=\left[\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right],$$

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}.$$

解法 2 $x_{n+2}=\frac{x_{n+1}+x_n}{2}\Rightarrow 2x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0$，此为二阶常系数齐次递归方程，特征方程为 $2r^2-r-1=0$，$(2r+1)(r-1)=0$，特征根 $r_1=-\frac{1}{2}$，$r_2=1$，通解为



$x_n=A\left(-\frac{1}{2}\right)^n+B\cdot 1^n$，令 $n=1,2$ 得 $\begin{cases}0=A\left(-\frac{1}{2}\right)+B,\\ 1=A\times\frac{1}{4}+B,\end{cases}$ 解之得 $\begin{cases}A=\frac{4}{3},\\ B=\frac{2}{3}.\end{cases}$

所以 $x_n=\frac{4}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{2}{3}$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{2}{3}$.

例 2 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，且对于任意自然数 n，总有 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-2}$，是否存在实数 a,b，使得 $a_n=a-b\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 对于任意自然数 n 恒成立？若存在，给出证明；若不存在，说明理由.

分析 如果这样的 a,b 存在的话，则由 $a_n=a-b\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，对 $a_{n+1}=\frac{a_n}{a_n-2}$ 两边取极限，得 $a=\frac{a}{a-2}$，解得 $a=0$ 或 $a=3$.

若 $a=0$，则数列 $\{a_n\}$ 应该是以 1 为首项，以 $-\frac{2}{3}$ 为公比的等比数列. 可知 $a_1=1$，$a_2=-\frac{2}{3}$，显然 $a_2\neq\frac{a_1}{a_1-2}$，不合题意，舍去.

若 $a=3$，将 $a_1=1$ 代入 $a_n=a-b\left(-\frac{2}{3}\right)^n$，可求得 $b=-3$，此时 $a_n=3+3\times\left(-\frac{2}{3}\right)^n$ 同样验证 a_1,a_2 亦可得出矛盾. 因此，满足题意的实数 a,b 不存在.

评析 本题方法较隐蔽，如果用常规方法可以探求出正确结果，但是结果是否惟一却较难确定，所以运用极限的方法自然而然地可以推出矛盾情况.

极限思想的运用需通过分析有关对象在运动过程中的极限状态，提取信息，寻求合理的解题思路，这就需要思维具有广阔性和灵活性.

例 3 （2007 年安徽省高考理科卷第 14 题）如图 2-14 所示，抛物线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴的正半轴交于点 A，将线段 OA 的 n 等分点从左至右依次记为 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$，过这些分点分别作 x 轴的垂线，与抛物线的交点依次为 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{n-1}$，从而得到 $n-1$ 个直角三角形，依次为 $\triangle Q_1OP_1,\triangle Q_2P_1P_2,\cdots,\triangle Q_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$，当 $n\to\infty$ 时，这些三角形的面积之和的极限为______.

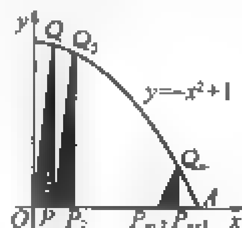


图 2-14

解 如图 2-14 所示，抛物线 $y=-x^2+1$ 与 x 轴的正半轴交于点 $A(1,0)$，将线段 OA 的 n 等分点从左至右依次记为 $P_1,P_2,\cdots,P_{n-1}$，过这些分点分别作 x 轴的垂线，与抛物线的交点依次为 $Q_1,Q_2,\cdots,Q_{n-1}$，从而得到 $n-1$ 个直角三角形，依

次是$\triangle Q_1OP_1$，$\triangle Q_2P_1P_2$，…，$\triangle Q_{n-1}P_{n-2}P_{n-1}$，有

$$P_{k-1}\left(\frac{k-1}{n},0\right),Q_{k-1}\left(\frac{k-1}{n},1-\frac{(k-1)^2}{n^2}\right),|P_{n-2}P_{n-1}|=\frac{1}{n}.$$

于是，当$n\to\infty$时，这些三角形的面积之和的极限为：

$$S=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n}\left[\left(1-\frac{1}{n^2}\right)+\left(1-\frac{2^2}{n^2}\right)+\cdots+\left(1-\frac{(n-1)^2}{n^2}\right)\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left[\frac{(n-1)n^2-\frac{1}{6}(n-1)(n-2)(2n-3)}{n^2}\right]=\frac{1}{3}.$$

说明 解答的过程中，用到了如下恒等式：$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$。试题设计里的"以直代曲"的极限思想反映了高等数学和初等数学的巧妙结合。

例4 已知a_0，$a_n=\frac{3n-1}{3n}a_{n-1}$，$n=1,2,3,\cdots$，求递推数列的极限$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$。

解 当$n=0$，$a_0=1$，

$n=1$，$a_1=\frac{2}{3}a_0$，

$n=2$，$a_2=\frac{5}{6}a_1=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}a_0$，

$n=3$，$a_3=\frac{8}{9}a_2=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}a_0$，

…

$a_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{8}{9}\cdots\frac{3n-1}{3n}a_0$。

设 $$b_n=\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{9}{10}\cdots\frac{3n}{3n+1},c_n=\frac{4}{5}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{10}{11}\cdots\frac{3n+1}{3n+2}$$

从而

$$0<a_n^3<a_nb_nc_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{9}{10}\cdot\frac{10}{11}\cdot\cdots\cdot\frac{3n-1}{3n}\cdot\frac{3n}{3n+1}\cdot\frac{3n+1}{3n+2}=\frac{2}{3n+2}$$

故 $$0<a_n<\sqrt[3]{\frac{2}{3n+2}}=\left(\frac{2}{3n+2}\right)^{\frac{1}{3}},而\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3n+2}\right)^{\frac{1}{3}}=0，$$

所以由夹逼准则得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。

例5 （2002年全国高中数学联合竞赛一试第14题）如图2-15所示，有一列曲线P_0，P_1，P_2，… 已知P_0所围成的图形是面积为1的等边三角形，P_{k+1}是对P_k进行如下



操作得到：将 P_k 的每条边三等分，以每边中间部分的线段为边，向外作等边三角形，再将中间部分的线段去掉（$k=0,1,2,\cdots$）. 记 S_n 为曲线 P_n 所围成图形的面积.

(1) 求数列 $\{S_n\}$ 的通项公式；

(2) 求 $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

解 (1) 对 P_0 进行操作，容易看出 P_0 的每条边变成 P_1 的 4 条边，故 P_1 的边数为 3×4；同样，对 P_1 进行操作，P_1 的每条边变成 P_2 的 4 条边，故 P_2 的边数为 3×4^2，从而不难得到 P_n 的边数为 3×4^n.

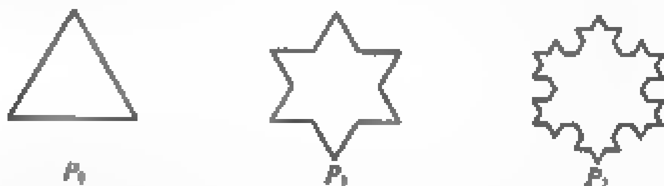


图 2－15

已知 P_0 的面积为 $S_0=1$，比较 P_1 与 P_0，容易看出 P_1 在 P_0 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^2}$，而 P_0 有 3 条边，故 $S_1=S_0+3\times\frac{1}{3^2}=1+\frac{1}{3}$，再比较 P_2 与 P_1，可知 P_2 在 P_1 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^2}\cdot\frac{1}{3^2}$，而 P_1 有 3×4 条边，故

$$S_2=S_1+3\times4\times\frac{1}{3^4}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}.$$

类似地有

$$S_3=S_2+3\times4^2\times\frac{1}{3^6}=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}.$$

于是有

$$S_n=1+\frac{1}{3}+\frac{4}{3^3}+\frac{4^2}{3^5}+\cdots+\frac{4^{n-1}}{3^{2n-1}}$$

$$=1+\frac{3}{4}\times\frac{\frac{4}{9}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]}{1-\frac{4}{9}}$$

$$=1+\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{4}{9}\right)^n \tag{1}$$

下面利用数学归纳法证明(1)式. $n=1$ 时，由上已知(1)式成立.

假设 $n=k$ 时，有 $S_k=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{4}{9}\right)^k$.

当 $n=k+1$ 时，易知第 $k+1$ 次操作后，比较 P_{k+1} 与 P_k，P_{k+1} 在 P_k 的每条边上增加了一个小等边三角形，其面积为 $\frac{1}{3^{2(k+1)}}$，而 P_k 有 3×4^k 条边，故

$$S_{k+1}=S_k+3\cdot 4^k\cdot\frac{1}{3^{2(k+1)}}=S_k+\frac{4^k}{3^{2k+1}}=\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\times\left(\frac{4}{9}\right)^{k+1}.$$

综上，由数学归纳法，(1)式得证。

(2) $\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\frac{8}{5}-\frac{3}{5}\cdot\left(\frac{4}{9}\right)^n\right]=\frac{8}{5}$。

例 6 某大型国有企业选择 A，B 两个餐厅供应 1000 名员工的午餐，且由员工自由选择在 A 餐厅或 B 餐厅进餐. 有资料表明：在本星期一选 A 餐厅的员工有 10% 的人会在下星期一选 A 餐厅；而在选 B 餐厅的员工中有 30% 的人会在下星期一选 A 餐厅. 用 x_n，y_n 分别表示第 n 个星期一选 A 餐厅、B 餐厅进餐的员工人数，试以 x_{n-1}，y_{n-1} 表示出 x_n，y_n，判断随时间的推移，在 A 餐厅、B 餐厅进餐的员工人数各自稳定在多少人左右，并说明判断理由.

分析 "随时间的推移"指的是无限推移下去，由此可以联想利用极限求解.

解 依题意可知

$$x_n=0.9x_{n-1}+0.3y_{n-1},\tag{1}$$

$$y_n=0.7y_{n-1}+0.1x_{n-1},$$

其中 $n\in\mathbf{N}$ 且 $n\geqslant 2$. 又 $x_{n-1}+y_{n-1}=1000$，代入(1)式得 $x_n=\frac{3}{5}x_{n-1}+300$，即，$x_n-750=\frac{3}{5}(x_{n-1}-750)$，所以，$\frac{x_n-750}{x_{n-1}-750}=\frac{3}{5}$，所以数列 $\{x_n-750\}$ 是以 x_1-750 为首项，$\frac{3}{5}$ 为公比的等比数列，所以

$$x_n-750=(x_1-750)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1},\ x_n=(x_1-750)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+750.$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left[(x_1-750)\left(\frac{3}{5}\right)^{n-1}+750\right]=750$，

此时 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=1000-750=250$.

故随时间的推移，在 A 餐厅进餐的员工人数稳定在 750 人左右，在 B 餐厅进餐的员工人数稳定在 250 人左右.

说明 由本例可以看出，运用极限知识，可以避免繁难的计算，迅速解答有关问题.

递推是表达数列的一种重要方式. 在数列的运算中，掌握递推关系的灵活运用可谓举足轻重. 事实上，递推作为一种思想，一种从有限认识无限的数学思想，更是我们认识问题和解决问题的一个重要工具.

例 7 正三角形 ABC 中，P_1 是 AB 上的一点，自 P_1 出发，作 $P_1Q_1\perp BC$ 于 Q_1，$Q_1R_1\perp CA$ 于 R_1，$R_1P_2\perp AB$ 于 P_2（图 2-16）；再由 P_2 重复上述作法，得到 Q_2，R_2，P_3，



$Q_3, R_3, \cdots$ 试问：当 $n \to \infty$ 时，点 P_n 无限接近于 AB 上的哪一点？

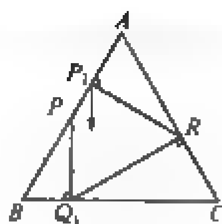


图 2-16

解 设正三角形的边长为 a，$BP_n = x_n$，于是

$$BQ_n = BP_n\cos 60^\circ = \frac{1}{2}x_n, \quad CQ_n = a - BQ_n = a - \frac{1}{2}x_n.$$

从而 $\quad CR_n = CQ_n\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}x_n\right),$

$$AR_n = a - CR_n = a - \frac{1}{2}\left(a - \frac{1}{2}x_n\right) = \frac{1}{2}a + \frac{1}{4}x_n.$$

所以 $\quad AP_{n+1} = AR_n\cos 60^\circ = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}x_n\right),$

$$BP_{n+1} = a - AP_{n+1} = a - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{4}x_n\right) = \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}x_n.$$

因为
$$BP_{n+1} = x_{n+1},$$
所以
$$x_{n+1} = \frac{3}{4}a - \frac{1}{8}x_n (n \geqslant 1). \tag{1}$$
所以
$$x_{n+1} - \frac{2}{3}a = -\frac{1}{8}\left(x_n - \frac{2}{3}a\right). \tag{2}$$

(2) 式表明，当 $x \neq \frac{2}{3}a$ 时，数列 $\left\{x_n - \frac{2}{3}a\right\}$ 是一个以 $x_1 - \frac{2}{3}a$ 为首项，$-\frac{1}{8}$ 为公比的等比数列，所以 $x_n = \frac{2}{3}a + \left(x_1 - \frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}$。

所以
$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{2}{3}a + \left(x_1 - \frac{2}{3}a\right)\left(-\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right] = \frac{2}{3}a.$$

而当 $x_1 = \frac{2}{3}a$ 时，由(1)式易知，$x_n = \frac{2}{3}a$. 因此，当 $n \to \infty$ 时，点 P_n 无限接近于分线段 AB 为 1 : 2 的内分点.

例 8 已知点 $P_n(a_n, b_n)$ 满足：$a_{n+1} = a_n \cdot b_{n+1}, b_{n+1} = \frac{b_n}{1-a_n^2}$ 且 $P_0\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) (n \in \mathrm{N})$

(1) 求过点 P_0，P_1 的直线 l 的方程；

(2) 判断点 $P_n (n \geqslant 2)$ 与直线 l 的位置关系；

(3) 求点 P_n 的极限位置.

解 (1) 由 $a_0 = \frac{1}{3}, b_0 = \frac{2}{3}$ 得 $a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{4}$. 显然直线 l 的方程为 $x + y = 1$

(2) 由 $a_1 = \frac{1}{4}, b_1 = \frac{3}{4}$ 得 $a_2 = \frac{1}{5}, b_2 = \frac{4}{5}$. 所以点 $P_2 \in l$. 猜想点 $P_n (n \geqslant 2)$ 在直线 l 上.

以下用数学归纳法证明：

当 $n=2$ 时，点 $P_2\in l$. 假设当 $n=k(k\geqslant 2)$ 时，点 $P_k\in l$ 即 $a_k+b_k=1$.

当 $n=k+1$ 时，$a_{k+1}+b_{k+1}=a_kb_{k+1}+b_{k+1}=(1+a_k)\cdot\dfrac{b_k}{1-a_k^2}=\dfrac{b_k}{1-a_k}=1$，所以点 $P_{k+1}\in l$. 所以点 $P_n\in l(n\geqslant 2)$.

(3) 由 $a_{n+1}=a_n\cdot b_{n+1}, b_{n+1}=\dfrac{b_n}{1-a_n^2}, a_n+b_n=1$ 得

$$a_{n+1}=a_n\cdot\frac{b_n}{1-a_n^2}=a_n\cdot\frac{1-a_n}{1-a_n^2}=\frac{a_n}{1+a_n}(a_n\neq 0),$$

所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{1}{a_n}+1$. 所以 $\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_0}$ 为首项，公差为 1 的等差数列，

所以
$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_0}+n=n+3,$$

所以
$$a_n=\frac{1}{n+3}, b_n=\frac{n+2}{n+3}.$$

所以点 $P_n\to P(0,1)$.

例 9 数列 $\{a_n\}$ 的首项 $a_1=1$，前 n 项和 S_n 满足 $2kS_n-(2k+1)S_{n-1}=2k$（常数 $k>0, n=2,3,\cdots$）.

(1) 求证：数列 $\{a_n\}$ 是等比数列；

(2) 设数列 $\{a_n\}$ 的公比为 $f(k)$，作数列 $\{b_n\}$，使 $b_1=3, b_n=f\left(\dfrac{1}{b_{n-1}}\right)(n=2,3,4,\cdots)$，求数列 $\{b_n\}$ 的通项公式；

(3) 设 $c_n=b_n-2$，若存在 $m\in\mathbf{N}^*$，且 $m<n$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_mc_{m+1}+c_{m+1}c_{m+2}+\cdots+c_nc_{n+1})<\dfrac{1}{2007}$，试求 m 的最小值.

解 (1) 当 $n\geqslant 2$ 时，$2kS_n-(2k+1)S_{n-1}=2k$. 所以 $2k(S_n-S_{n-1})-S_{n-1}=2k$，即

$$2ka_n-S_{n-1}=2k, \tag{1}$$

$$2ka_{n+1}-S_n=2k. \tag{2}$$

(2) 式 − (1) 式得 $2ka_{n+1}-2ka_n-a_n=0$. 即 $2ka_{n+1}=(2k+1)a_n$.

由(1) 式，$a_2=1+\dfrac{1}{2k}$，所以 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{2k+1}{2k}=1+\dfrac{1}{2k}$.

又 $\dfrac{a_2}{a}=1+\dfrac{1}{2k}$ 符合上式. 所以 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，$1+\dfrac{1}{2k}$ 为公比的等比数列.

(2) 由问(1) 及 $f(k)=1+\dfrac{1}{2k}$，所以 $b_n=f\left(\dfrac{1}{b_{n-1}}\right)=1+\dfrac{1}{2}b_{n-1}(n\geqslant 2)$，



故
$$b_n-2=\frac{1}{2}(b_{n-1}-2).$$

又 $b_1=3$，即 $b_1-2=1$，$\frac{b_n-2}{b_{n-1}-2}=\frac{1}{2}$，所以数列$\{b_n-2\}$是以1为首项，$\frac{1}{2}$为公比的等比数列. 所以 $b_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $b_n=2+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

(3) 由问(2)知 $c_n=b_n-2=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，则 $c_n\cdot c_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$.

于是
$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}(c_mc_{m+1}+c_{m+1}c_{m+2}+\cdots+c_nc_{n+1})\\=&\lim_{n\to\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{2m+1}+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}\right]\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}-\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+1}}{1-\frac{1}{4}}\\=&\frac{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-1}<\frac{1}{2007}.\end{aligned}$$

所以$\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-3}<\frac{1}{669}$. 又因为 $512<669<1024$，故 $10>2m-3>9$，即$\frac{13}{2}>m>6$. 又 $m\in\mathbf{N}^*$，所以 m 的最小值为7.

例10 已知各项均不小于1的数列$\{a_n\}$满足：$a_1=1$，$a_2=1+\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\left(\frac{a_n}{a_{n+1}-1}\right)^2+\left(\frac{a_n-1}{a_{n-1}}\right)^2=2$. 试求：

(1) 数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$的值.

解 (1) 令 $b_n=\left(\frac{a_{n+1}-1}{a_n}\right)^2$，则$\frac{1}{b_n}+b_{n-1}=2$且$b_1=\frac{1}{2}$. 由此，$b_2=\frac{2}{3}$，$b_3=\frac{3}{4}$，…观察知 $b_n=\frac{n}{n+1}$.

下面用数学归纳法证明.

当 $n=1,2,3$ 时，结论显然成立. 假设 $n=k$ 时，结论成立，下面证明 $n=k+1$ 时结论亦成立.

由 $b_k=\frac{k}{k+1}$，知 $b_{k+1}=\frac{1}{2-b_k}=\frac{k+1}{k+2}$. 因此，$b_n=\frac{n}{n+1}$ 对一切正整数 n 成立.



由此得 $$(a_{n+1}-1)^2=\frac{n}{n+1}a_n^2.$$

由 $a_n\geqslant 1$，知 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{n}{n+1}}a_n+1$.

令 $c_n=\sqrt{n}a_n$，则 $c_{n+1}=c_n+\sqrt{n+1}$，且 $c_1=1$. 故

$$c_n=c_{n-1}+\sqrt{n}=c_{n-2}+\sqrt{n}+\sqrt{n-1}=\cdots=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}.$$

从而 $a_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}$.

(2) 注意到

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}>\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}}=2\sum_{k=1}^{n}k(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=2(-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}+n\sqrt{n+1})$$

故 $$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}>\frac{2}{3}n\sqrt{n+1}>\frac{2}{3}n\sqrt{n},$$

即 $$\frac{a_n}{n}>\frac{2}{3}.$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\geqslant\frac{2}{3}.$$

类似地，由于

$$\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{2k}{\sqrt{k-1}+\sqrt{k}}=2\sum_{k=1}^{n}k(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})=2\left[(n+1)\sqrt{n}-\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\right],$$

故 $\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}<\frac{2(n+1)}{3}\sqrt{n}$，即 $\frac{a_n}{n}<\frac{2}{3}\left(1+\frac{1}{n}\right)$. 所以，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\leqslant\frac{2}{3}\left(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{3}$.

综上，$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\frac{2}{3}$

例 11 (2006 届清华大学自主招生数学试题第 7 题)已知 $f(x)$ 满足：对实数的 a，b 有 $f(a\cdot b)=af(b)+bf(a)$，且 $|f(x)|\leqslant 1$. 求证：$f(x)$ 恒为零.

(可用以下结论：若 $\lim_{x\to\infty}g(x)=0$，$|f(x)|\leqslant M$，M 为一常数，那么 $\lim_{x\to\infty}(f(x)\cdot g(x))=0$.)

证明 由条件，若 a，b 实数有

$$f(a\cdot b)=af(b)+bf(a). \tag{1}$$

令 $a=b=0$，得 $f(0)=0$. 令 $a=b=1$ 得 $f(1)=0$，$a=b=-1$，得 $f(-1)=0$.

下面用反证法证明.

设至少存在一点 x_0 使得 $f(x_0)\neq 0$，显然 $x_0\neq 0$，$x_0\neq\pm 1$，若 $|x_0|>1$，对正整数 n 反



复利用(1)式得 $f(x_0^n)=nx_0^{n-1}f(x_0)$，

即
$$\frac{f(x_0^n)}{nx_0^{n-1}}=f(x_0)\neq0。\tag{2}$$

考虑 $n\to\infty$ 时，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{nx_0^{n-1}}=0$，此时 $n\to\infty\Rightarrow nx_0^{n-1}\to\infty$，由条件 $|f(x)|\leqslant1$ 及结论，若 $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$，$|f(x)|\leqslant M$，$M$ 为常数，那么，$\lim(f(x)\cdot g(x))=0$，与(2)式在 $n\to\infty$ 时矛盾．所以对任意的 $|x|\geqslant0$，有 $f(x)=0$；若存在 $0<|x_0|<1$，使得 $f(x_0)\neq0$，从而由条件可知 $f(1)=f\left(x_0\cdot\frac{1}{x_0}\right)=x_0\cdot f\left(\frac{1}{x_0}\right)+\frac{1}{x_0}f(x_0)k=0$，所以 $f\left(\frac{1}{x_0}\right)\neq0$，同样，对正整数 n 反复利用(1)式得 $f(x_0^{-n})=\frac{n}{x_0^{n-1}}f(x_0^{-1})$，即 $\frac{x_0^{n-1}}{n}f(x_0^{-n})=f(x_0^{-1})\neq0$，与前面的证明完全类似，该式两边在 $n\to\infty$ 时矛盾，所以不存在 $0<|x_0|<1$，使得 $f(x_0)\neq0$．综上所述，对任意实数 x，$f(x)$恒为零

评析　这是集抽象函数、数列的极限及高等数学背景于一体的综合题．在方法上，首先用特殊值法探路，继而以反证法(题意隐含要证结论为：对任意的实数 x 都有$f(x)=0$，这就具有了使用反证法处理问题的一般特点)寻找矛盾．这时，因为反设中某点 x_0 满足 $f(x_0)\neq0$ 是一个有限值，如何才能把 $x\to\infty$ 的这个无限的条件给用上，实现有限到无限的转化呢？我们想到可以让 $n\to\infty$，但此时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_0^n$ 并不总是存在的，从而进行分类讨论并根据 x_0 的不同取值范围采取不同的推理形式．

能力训练

1. 已知 $f(n)=1+2+3+\cdots+n$(n 为正整数)，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n^2)}{[f(n)]^2}$ 等于　　(　　)

A. 2　　B. $\frac{4}{3}$　　C. 0　　D. 不存在

2. (2005 年广东省高考理科卷第 10 题) 已知数列$\{x_n\}$满足 $x_2=\frac{x_1}{2}$，$x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})(n\geqslant3)$．若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$，则 $x_1=$　　(　　)

A. $\frac{3}{2}$　　B. 3　　C. 4　　D. 5

3. 已知 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=\frac{2a_na_{n+1}}{a_n+a_{n+1}}$，则数列$\{a_n\}$的极限为　　(　　)

A. 不存在　　B. 等于1　　C. 等于$\frac{3}{2}$　　D. 等于2

4.（第13届"希望杯"高二竞赛题）$\{a_n\}$，$\{b_n\}$均为正数数列，且$\{a_n\}$是公差为d的等差数列，而b_n等于抛物线$y=a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}(n\in\mathbf{N}^*)$在$x$轴上截得的线段长，则$\lim\limits_{n\to\infty}(b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n)$等于　　（　　）

A. $\frac{d}{a_1}$　　B. $\frac{2d}{a_1}$　　C. $\frac{3d}{a_1}$　　D. $\frac{4d}{a_1}$

5. 已知数列$\{a_n\}$满足$a_1=2$，$a_2=6$，且$\frac{a_{n+2}+a_n}{a_{n+1}+1}=2$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}+\cdots+\sqrt{a_n}}{n^2}$的值为　　（　　）

A. $\frac{1}{2}$　　B. 2　　C. 1　　D. 0

6.（第15届"希望杯"高二第2试竞赛题）已知数列$\{a_n\}$中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}$，且$b_n=|a_{n+1}-a_n|(n\in\mathbf{N}^*)$，设$S_n$是$\{b_n\}$的前$n$项和，则下列不等式中一定成立的是　　（　　）

A. $0.3<S_n<0.4$　　B. $0.4<S_n<0.5$

C. $0.5<S_n<0.8$　　D. $0.5<S_n<0.9$

7. 数列$\{a_n\}$满足递推关系$a_n=2+\frac{1}{5}a_{n-1}(n>1)$，且首项$a_1=5$，则通项公式$a_n=$ ________，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=$ ________.

8.（2002年北京市高考理科卷试题）数列$\{x_n\}$由下列条件确定：$x_1=a>0$，$x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$，$n\in\mathbf{N}^*$，若数列$\{x_n\}$的极限存在，且大于零，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的值为________.

9. 在杨辉三角中（图2-17），记斜线AB上方一斜行的前n个数字和$S(n)=1+3+6+\cdots$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{S(n)}=$ ________.



图2-17

10. 数列$\{a_n\}$中，已知$a_1=1$，$a_{n+1}>a_n$，且$a_{n+1}^2+a_n^2+1=2(a_{n+1}a_n+a_{n+1}+a_n)$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=$ ________.

11. 已知$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=0$，则实数$a$，$b$之和为________.

12. 定义数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$如下：$a_0=2$，$b_0=1$，且满足$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$，当$n\to+\infty$时，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=A$，则$A$的值为________.



13. 设正数数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且存在正数t，使得对于所有的正整数n，有$\sqrt{tS_n}=\frac{t+a_n}{2}$成立。如果$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}}{a_n}<t$，求$t$的取值范围。

14. 某校有教职员工150人，为了丰富教职工的课余生活，每天定时开放健身房和娱乐室。据调查统计，每次去健身房的人有10%下次去娱乐室，而在娱乐室的人有20%下次去健身房。请问，随着时间的推移，去健身房的人数能否趋于稳定？

15. (2002年北京市高考春季招生试题，1957年上海高三竞赛题改编题)　已知点的序列$A_n(x_n,0)$，$n\in \mathbf{N}^*$，其中$x_1=0$，$x_2=a>0$，A_n是线段$A_{n-2}A_{n-1}$的中点$(n\geqslant 3)$.

(1) 写出x_n与x_{n-1}，x_{n-2}的关系式$(n\geqslant 3)$；

(2) 设$a_n=x_{n+1}-x_n$，计算a_1，a_2，a_3，由此推测数列$\{a_n\}$的通项公式，并加以证明；

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

16. (1983年上海市高中竞赛题改编题) 已知点列$\{P_n\}$满足：$P_1(-1,3)$，$P_n(x_n,y_n)$，$P_{2n-1}P_{2n}$ // y轴且$2y_{2n-1}=-3y_{2n}$，$P_{2n}P_{2n+1}$的斜率为2且$4y_{2n}=-3y_{2n+1}$，其中$n\in \mathbf{N}^*$.

(1) 求两坐标数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$的通项公式；

(2) 点列$\{P_n\}$是否存在极限点？若存在，求出该点的坐标；否则，说明理由。

17. (第15届"希望杯"高二竞赛题)　图2-18是由无限个阻值均为1Ω的电阻按一定规律组成的网络。若从图中A_1B_1处沿虚线将网络截断，A，B间的电阻为R_1(Ω)；若从A_2B_2处沿虚线将网络截断，A，B间的电阻为R_2(Ω)；以此类推，若从A_nB_n处沿虚线将网络截断，A，B间的电阻为R_n(Ω).

(1) 求数列R_1，R_2，…，R_n，…的通项.

(2) 当网络趋于无穷时(即$n\to\infty$时)，求A，B间的电阻R(Ω).

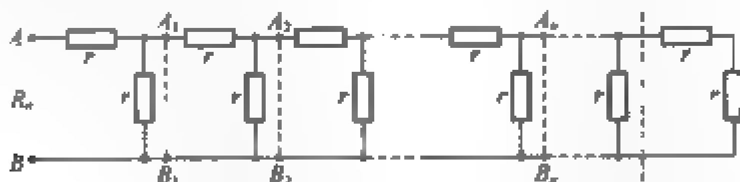
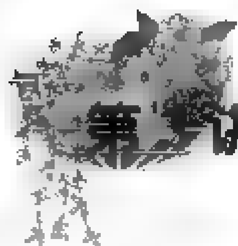


图2-18

18. (1994年国家集训队测验题) 已知正数列a_1，a_2，a_3，…满足$a_{n+1}=\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ $(n\in \mathbf{N}^*)$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n$.



第[illegible]讲　递推数列与函数

知识归纳

函数与数列均为高中数学的重点内容，为加大问题的综合程度和思想方法运用的深度，常将函数与数列两者交融的试题作为各类考试能力考查的把关题.

(1) 数列是一类特殊的函数(其定义域为正整数集)，因此，既可用函数的性质和观点解决递推数列的有关问题，也可利用数列知识解决某些函数问题.

(2) 由函数的解析式 $f(x)$ 构造出的 $a_{n+1}=f(a_n)$ 的递推关系，是函数与数列交融的最基本形式，解决这类问题最常用的方法是改造递推关系，从而把问题化归为等差数列或等比数列来解.

(3) 用函数的观点看数列：

① 等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1+(n-1)d$，可以写成

$$a_n=d\cdot n+(a_1-d). \tag{1}$$

它是 n 的一次函数，以 (n,a_n) 为坐标的一群离散点均匀地分布在直线上. 公差 $d=\frac{a_n-a_1}{n-1}$ 是相应直线的斜率. 当 $d>0$ 时，数列递增；当 $d<0$ 时，数列递减；当 $d=0$ 时，$\{a_n\}$ 为常数数列.

求和公式 $S_n=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，可以写成

$$S_n=\frac{d}{2}n^2+\left(a_1-\frac{d}{2}\right)n. \tag{2}$$

它是 n 的二次函数(缺常数项)，它的图像是过原点的抛物线上的一群孤立点.

② 等比数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=a_1q^{n-1}$，可以写成

$$a_n=\frac{a_1}{q}\cdot q^n(n\in\mathbf{N}^*). \tag{3}$$



当 $q>0$ 且 $q\neq 1$ 时，$y=q^x(x\in\mathbf{R})$ 是指数函数，而 $y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x(x\in\mathbf{R})$ 是一个不为 0 的常数与指数函数的积，因此(3)式的图像是函数 $y=\frac{a_1}{q}\cdot q^x(x\in\mathbf{R})$ 的图像上的一群孤立点.

很明显，若 $\frac{a_1}{q}>0$，则当 $q>1$ 时，数列递增；当 $0<q<1$ 时，数列递减.

(4) 解析几何背景下的数列问题，简称为"点列"问题. 这类问题往往以解析几何的点、直线、曲线的无限运动为背景，融数列、不等式、解析几何以及导数等知识于一体，综合性强，能够全面考查运用所学知识分析问题与解决问题的能力. 因此，"点列"问题已成为近几年高考与竞赛命题的新宠

"点列"问题的主要解题步骤可分为 3 步：第一步是根据解析几何背景抽象出数列的递推关系式，第二步是在递推关系式的基础上求得数列的通项或分析通项的性质；第三步是由通项解决数列求和、数列极限以及不等式等问题.

数学归纳法是解决"点列"问题比较常用的方法. 以固定曲线上的"点列"为背景的递推数列问题，只要将第 n 个点的坐标代入曲线方程，通常就可转化为我们熟知的递推数列问题；按某种规则形成的"点列"问题，以第 n 个点和第 $n+1$ 个点(甚至更多相邻点)的关系为突破口，找出坐标间的递推关系，也可转化为我们熟知的递推数列问题.



例题分析

例 1 (第 4 届"希望杯"高一第 2 试第 19 题)定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $y=f(x)$ 的值域是 $\mathbf{R}^+$，对任何 $x\in\mathbf{R}$，都有 $\lg[f(x+1)]+\lg[f(x-1)]=\sqrt{2}\lg[f(x)]$，则 $f(x-2)f(x+2)=$ ______

解 $\lg[f(x+1)]+\lg[f(x-1)]=\sqrt{2}\lg[f(x)]$，就是 $f(x+1)f(x-1)=f^{\sqrt{2}}(x)$.

于是，$f(x-2)f(x+2)=\frac{f[(x-1)-1]f[(x-1)+1]\cdot\{f[(x+1)+1]f[(x-1)+1]\}}{f^2(x)}$

$$=\frac{f^{\sqrt{2}}(x+1)f^{\sqrt{2}}(x-1)}{f^2(x)}=\frac{[f(x+1)f(x-1)]^{\sqrt{2}}}{f^2(x)}=\frac{[f^{\sqrt{2}}(x)]^{\sqrt{2}}}{f^2(x)}=1.$$

评析 此题的背景 $f(x)$ 是周期函数，由 $f(x-2)\cdot f(x+2)=1$，得 $f(x+2)=\frac{1}{f(x-2)}=\frac{1}{f[(x-4)+2]}=f(x-4)$，所以 $f(x+6)=f(x)$，即 $f(x)$



是周期函数,6 是它的一个周期.

数列是特殊的函数,在一定的条件下,函数与数列两者可以相互转化.

如果令 $a_n = \lg f(x+n)$,则 $\lg[f(x+1)]+\lg[f(x-1)]=\sqrt{2}\lg[f(x)]$ 即 $a_{n+1}+a_{n-1}=\sqrt{2}a_n$,于是问题就化归为二阶线性递推数列的周期性问题.

例 2 设函数 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$,$f_n(x)=\underbrace{f\{f[f\cdots f(x)]\}}_{n}(n\in\mathbf{N}^*)$,求 $f_{2008}(x)$ 的表达式

解 由 $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}(x>0)$,得 $f^2(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$.

设 $f_n^2(x)=a_n^2$,则 $a_1^2=f^2(x)=\dfrac{x^2}{1+x^2}$,$a_{n+1}^2=\dfrac{a_n^2}{1+a_n^2}$.

所以 $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}=1+\dfrac{1}{a_n^2}$,即 $\dfrac{1}{a_{n+1}^2}-\dfrac{1}{a_n^2}=1$. 故数列 $\left\{\dfrac{1}{a_n^2}\right\}$ 是以 $\dfrac{1}{a_1^2}$ 为首项,1 为公差的等差数列,

故 $\dfrac{1}{a_n^2}=\dfrac{1}{a_1^2}+(n-1)$,即 $a_n^2=\dfrac{1}{(n-1)+\dfrac{1}{a_1^2}}=\dfrac{x^2}{1+nx^2}(x>0)$.

因此,$a_n=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}(x>0,n\in\mathbf{N}^*)$,即,$f_n(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+nx^2}}(x>0,n\in\mathbf{N}^*)$.

所以 $f_{2008}(x)=\dfrac{x}{\sqrt{1+2008x^2}}(x>0)$.

说明 函数迭代问题是各类各级考试和竞赛中的常见题型,这类问题常用不完全归纳法求解,但往往不能揭示其一般规律. 这里,我们将其转化为给出递推关系的数列问题,再利用数列的有关知识,使问题简捷、巧妙地获解.

例 3 函数 $y=f(x)$ 满足 $f(x)=\dfrac{f(x-1)}{f(x-2)}$,$f(x)\neq 0$,数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1=1$,$a_2=2$ 且 $a_n=\dfrac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$,$(n\geqslant 3)$.

(1) 求证:$T=6$ 是函数 $f(x)$ 的一个周期;

(2) 根据函数的周期性类比求数列 a_{2008} 的值.

解 (1) 由 $f(x)=\dfrac{f(x-1)}{f(x-2)}$ 得 $f(x-1)=f(x)\cdot f(x-2)$,

类推得 $\qquad f(x-2)=f(x-1)\cdot f(x-3)$,

两式相乘得 $\qquad f(x-1)f(x-2)=f(x)f(x-1)f(x-2)f(x-3)$,

则 $f(x)=\dfrac{1}{f(x-3)}$,故 $f(x+6)=\dfrac{1}{f(x+3)}=f(x)$.



(2) 因为 $a_n=\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$，令 $f(n)=a_n$，则 $f(n-1)=a_{n-1}$，$f(n-2)=a_{n-2}$，则 $f(n)=\frac{f(n-1)}{f(n-2)}$ 与(1)类比得 $a_{n+6}=a_n$，即6是数列$\{a_n\}$各项组成函数的周期，故 $a_{2006}=a_2=2$.

说明 上面通过递推数列与函数的类比，使问题简洁获解. 遇到类似问题时，如果我们善于联想，勇于探索，多加总结，运用智慧，那么就会类比出美妙绝伦、丰富多彩的性质.

例4 已知函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x\leqslant 0,\\ n[x-(n-1)]+f(n-1), & n-1\leqslant x\leqslant n, n\in\mathbf{N}\end{cases}$

(1) 在区间 $0\leqslant x\leqslant 3$ 上描绘 $y=f(x)$ 的图形；

(2) 求 $f(n)$；

(3) 设 $S(a)(a\geqslant 0)$ 为由 x 轴，$y=f(x)$ 与 $x=a$ 所围成的区域面积，a 为自然数 n 时，求 $S(n)-S(n-1)$；

(4) 求 $S(n)$；

(5) 求满足 $S(a)>100$ 的最小的自然数 a.

分析 这是分段函数形式的递推数列问题，要充分利用递推数列的工具性作用完成解题任务.

解 (1)
$$f(0)=0, \tag{1}$$
当 $n-1\leqslant x\leqslant n$ 时，
$$f(x)=n[x-(n-1)]+f(n-1). \tag{2}$$
在(2)式中，令 $n=1$，$0\leqslant x\leqslant 1$ 时，$f(x)=x+f(0)=x$，所以 $f(1)=1$.

在(2)式中，令 $n=2$，$1<x\leqslant 2$ 时，$f(x)=2(x-1)+f(1)=2x-1$，所以 $f(2)=3$.

在(2)式中，令 $n=3$，$2<x\leqslant 3$，$f(x)=3(x-2)+f(2)=3x-3$(如图3-1所示).

(2) 在(2)式中，$f(n)=n+f(n-1)$，所以 $f(n)-f(n-1)=n$. 即 $f(1)-f(0)=1$，$f(2)-f(1)=2$，…，$f(n)-f(n-1)=n$. 将以上各式相加，$f(n)=f(0)+\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$.

(3) 由(2)式得，当 $n-1\leqslant x\leqslant n$ 时，$f(x)=n[x-(n-1)]+\frac{1}{2}(n-1)n=nx-\frac{n(n-1)}{2}$(用 $f(n)=\frac{1}{2}n(n+1)$ 的结论).

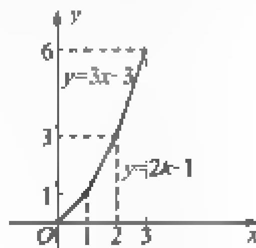
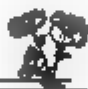


图3-1

当 $n\geqslant 1$ 时，因为 $S(n)-S(n-1)$ 是由 $y=f(x)$，直线 $x=n-1$，$x=n$ 及 x 轴所围成的梯形面积，所以
$$S(n)-S(n-1)=\frac{1}{2}[f(n-1)+f(n)]\cdot 1$$
$$=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{1}{2}n(n+1)\right]=\frac{1}{2}n^2.$$



(4) $S(n)=S(0)+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}k^2=\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1)$.

(5) $S(a)=\frac{1}{12}a(a+1)(2a+1)\geqslant 100$.

由于 $f(x)>0(x>0)$，所以

$$S(7)=\frac{1}{12}\cdot 7\cdot 8\cdot 15=70<100,$$

$$S(8)=\frac{1}{12}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=102>100.$$

所以满足 $S(a)\geqslant 100$ 的最小自然数 a 为 8.

例 5 (2003 年江苏省高考理科卷压轴题)设 $B_1, B_2, \cdots, B_n, \cdots$ 顺次为曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 上的点，$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 顺次为 x 轴上的点，且 $\triangle OB_1A_1$，$\triangle A_1B_2A_2, \cdots, \triangle A_{n-1}B_nA_n, \cdots$，均为等腰直角三角形(其中 B_n 为直角顶点)，如图 3-2 所示，设 A_n 的坐标为 $(x_n, 0)(n\in\mathbf{N})$.

(1) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

(2) 求证 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}>\sqrt{n+1}-1$.

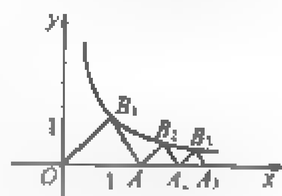


图 3-2

分析 (1) 由题意知，直线 OB_1 的方程为 $y=x$，它与曲线 $y=\frac{1}{x}(x>0)$ 的交点 $B_1(1,1)$，于是 $A_1(2,0)$. 由于 $A_n(x_n,0), A_{n+1}(x_{n+1},0)$ 的中点的横坐标 $\frac{x_{n+1}+x_n}{2}$ 即为 B_{n+1} 的横坐标，而 B_{n+1} 的纵坐标为 $\frac{1}{2}|A_nA_{n+1}|=\frac{x_{n+1}-x_n}{2}$，于是 $\frac{x_{n+1}+x_n}{2}\cdot\frac{x_{n+1}-x_n}{2}=1$，即 $x_{n+1}^2-x_n^2=4$. $\{x_n^2\}$ 是以 4 为首项，4 为公差的等差数列，故 $x_n^2=4+4(n-1)$，而 $x_n>0$，故 $x_n=2\sqrt{n}$.

(2) 因为
$$\frac{1}{x_k}=\frac{1}{2\sqrt{k}}>\frac{1}{\sqrt{k+1}+\sqrt{k}}=\sqrt{k+1}-\sqrt{k},\text{故}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}>\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\sqrt{n+1}-1.$$

说明 由于点的坐标是一有序实数对，因此，当函数图像上的点按照一定的规律运动时，其坐标就呈现出相应的关系. 从而生成了对应的数列(通常称为"点列"). 解决这类问题首先应从特殊情形着手分析，并从中得到一些启发；其次，通过"取样"分析，探索出相邻点坐标之间的递推关系再求解.



例6 如图3-3，已知动圆与直线 $y=-3$ 相切，并与定圆 $x^2+y^2=1$ 内切.

(1) 求动圆圆心的轨迹 C；

(2) 过原点作斜率为1的直线交曲线 C 于 P_1（P_1 为第一象限点），又过 P_1 作斜率为 $\frac{1}{2}$ 的直线交曲线 C 于 P_2，再过 P_2 作斜率为 $\frac{1}{4}$ 的直线交曲线 C 于 P_3，…，如此继续，一般地，过 P_n 作斜率为 $\frac{1}{2^n}$ 的直线交曲线 C 于 P_{n+1}，设 $P_n(x_n,y_n)$，$b_n=x_{2n+1}-x_{2n-1}$.

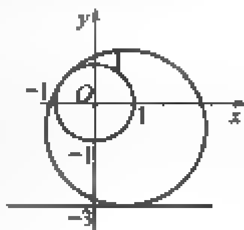


图3-3

① 求证：数列$\{b_n\}$是等比数列；

② 设数列$\{b_n\}$的前 n 项和为 S_n，试比较 $\frac{3}{4}S_n+1$ 与 $\frac{1}{3n+10}$ 的大小.

解 (1)由题意，设动圆圆心为 P，则 P 点到原点的距离等于 P 点到直线 $y=-2$ 的距离，由抛物线定义知，P 点的轨迹是以坐标原点为焦点，直线 $y=-2$ 为准线的抛物线，其轨迹方程为 $x^2=4(y+1)$.

(2) ① 设 $P_n(x_n,y_n)$，$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$，则 $x_n^2=4(y_n+1)$，$x_{n+1}^2=4(y_{n+1}+1)$，又由直线 P_nP_{n+1} 的斜率为 $\frac{1}{2^n}$，得 $\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{2^n}$. 因此 $\frac{1}{4}\cdot\frac{x_{n+1}^2-x_n^2}{x_{n+1}-x_n}=\frac{1}{2^n}$，即 $x_{n+1}+x_n=\frac{1}{2^{n-2}}$，

故
$$b_n=x_{2n+1}-x_{2n-1}=(x_{2n+1}+x_{2n})-(x_{2n}+x_{2n-1})$$
$$=\frac{1}{2^{2n-2}}-\frac{1}{2^{2n-3}}=-\frac{1}{2^{2n-2}}.$$

所以，数列$\{b_n\}$是以 $\frac{1}{4}$ 为公比的等比数列.

② 由①知 $b_n=-\frac{1}{2^{2n-2}}$，所以
$$S_n=-\left(\frac{1}{2^0}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-2}}\right)=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

整理得：$\frac{3}{4}S_n+1=\frac{1}{4^n}$. 因此，只要比较 4^n 与 $3n+10$ 的大小.

当 $n=1$ 时，$4<13$，所以 $4^n<3n+10$；

当 $n=2$ 时，$16=16$，所以 $4^n=3n+10$；

当 $n=3$ 时，$64>19$，所以 $4^n>3n+10$

猜测：当 $n\geq3$，$n\in\mathbf{N}$ 时，$4^n>3n+10$.

证法1 用数学归纳法

当 $n=3$ 时，显然成立；



假设当 $n=k(k\geqslant3,k\in N)$ 时，$4^k>3k+10$，

则当 $n=k+1$ 时，

$$4^{k+1}=4\cdot4^k>4(3k+10)=[3(k+1)+10]+9k+27>3(k+1)+10,$$

即当 $n=k+1$ 时，$4^n>3n+10$ 也成立.

所以，$4^n>3n+10$ 对 $n\geqslant3,n\in N^*$ 都成立.

证法2 利用二项式定理.

$$\begin{aligned}4^n&=(1+3)^n=1+C_n^1\cdot3+C_n^2\cdot3^2+\cdots+C_n^n\cdot3^n\\&\geqslant1+3n+\frac{n(n-1)}{2}\cdot3^2\\&>1+3n+9=3n+10(n\geqslant3).\end{aligned}$$

评析 高考题与竞赛题的最大区别就是前者往往有"梯"可攀，如本题从抛物线定义、斜率公式入手得到递推关系 $x_{n+1}+x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$，根据题设"$b_n=x_{2n+1}-x_{2n-1}$"的提示构造关系式 $x_{2n+1}-x_{2n-1}=(x_{2n+1}+x_{2n})-(x_{2n}+x_{2n-1})$ 实现顺利过渡. 如果要增加难度，就舍去此提示，直接求 x_n. 此时需要运用递推的方法，如可将 $x_{n+1}+x_n=\frac{1}{2^{n-1}}$ 两边同乘以 $(-1)^{n+1}$，得 $(-1)^{n+1}x_{n+1}-(-1)^nx_n=\frac{(-1)^{n+1}}{2^{n-1}}$. 令 $a_n=(-1)^nx_n$，再用累加法由 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1$ 求得.

例7 （1987年华罗庚金杯竞赛题改编题）如图3-4所示，点列 $P(0,0),P_1(1,0),P_2(1,1),P_3(0,1),P_4(-1,1),P_5(-1,0),P_6(-1,-1),P_7(0,-1),\cdots$ 是呈现方形环状、逆向绕行无限展开的. 试求：

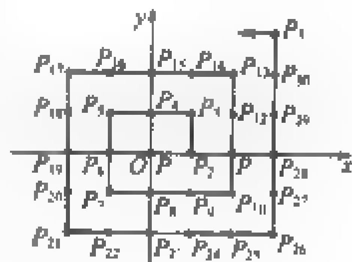


图3-4

(1) 点 P_{10000} 的位置；

(2) 点列 $\{P_n\}$ 中哪一点的坐标是 $(-10,-20)$？

解 设点列 $\{P_n\}$ 在第一象限内的转折点 (n,n) 是第 t_n 个点 $(n\in N^*)$，则 $t_1=3,t_2=t_1+(2+3)\cdot2,t_3=t_2+(4+5)\cdot2,t_4=t_3+(6+7)\cdot2,\cdots,t_{n+1}=t_n+[2n+(2n+1)]\cdot2=t_n+(8n+2),\cdots$.

于是，$t_n=(t_n-t_{n-1})+(t_{n-1}-t_{n-2})+\cdots+(t_3-t_2)+(t_2-t_1)+t_1=8[(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1]+2(n-1)+3=4n^2-2n+1(n\geqslant2)$.

验证知 $t_1=3$ 也适合此式.

(1) 令 $t_{n-1} \leqslant 10000 \leqslant t_n$，代入解得 $n=51\in \mathbf{N}^*$，则点 P_{10000} 在由点(50,50)绕到点(51,51)的过程中．又因为 $10000-t_{50}=99$，则点 P_{10000} 在点(50,50)左移99个单位的位置(-49,50)上．

(2) 由于点(-10,-20)右移31个单位到点(21,-20)，再上移41个单位到点(21,21)，且点(21,21)是第 $t_{21}=1723$ 个点，则点列 $\{P_n\}$ 中，第 $t_{21}-41-31=1651$ 个点 P_{1651} 的坐标是(-10,-20)．

说明 一般地，在点列 $\{P_n\}$ 中，由转折点 (n,n)（其中 $n\in \mathbf{N}^*$）左移 $2n$ 个单位到达转折点 $(-n,n)$，再下移 $2n$ 个单位到达转折点 $(-n,-n)$，再右移 $2n+1$ 个单位到达转折点 $(n+1,-n)$，再上移 $2n+1$ 个单位便到达转折点 $(n+1,n+1)$．

例8 (2004年湖南省高考理科卷试题)如图3-5，直线 $l_1: y=kx+1-k$ ($k\neq 0$, $k\neq \pm\frac{1}{2}$)与 $l_2: y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$ 相交于点 P．直线 l_1 与 x 轴交于 P_1，过 P_1 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_1，过 Q_1 作 y 轴的垂线交直线 l_1 于点 P_2，过点 P_2 作 x 轴的垂线交直线 l_2 于点 Q_2，…，这样一直作下去，可得到一系列点 P_1，Q_1，P_2，Q_2，…，点 $P_n(n=1,2,3,\cdots)$ 的横坐标构成数列 $\{x_n\}$．

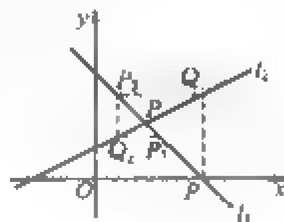


图3-5

(1) 证明：$x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in \mathbf{N}^*$；

(2) 求数列 $\{x_n\}$ 的通项公式；

(3) 比较 $2|PP_n|^2$ 与 $4k^2|PP_1|^2+5$ 的大小．

解 (1) 证明：设点 P_n 的坐标是 (x_n, y_n)，由已知可得点 Q_n，P_{n+1} 的坐标分别为 $\left(x_n, \frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}\right)$，$\left(x_{n+1}, \frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}\right)$．点 P_{n+1} 在直线 l_1 上，得 $\frac{1}{2}x_n+\frac{1}{2}=kx_{n+1}+1-k$，所以 $\frac{1}{2}(x_n-1)=k(x_{n+1}-1)$，即 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，$n\in \mathbf{N}^*$．

(2) 由题设知 $x_1=1-\frac{1}{k}$，$x_1-1=-\frac{1}{k}\neq 0$．又由(1)知 $x_{n+1}-1=\frac{1}{2k}(x_n-1)$，所以数列 $\{x_n-1\}$ 是首项为 x_1-1、公比为 $\frac{1}{2k}$ 的等比数列．从而 $x_n-1=-\frac{1}{k}\left(\frac{1}{2k}\right)^{n-1}$，即 $x_n=1-2\left(\frac{1}{2k}\right)^n$，$n\in \mathbf{N}^*$．

(3) 由 $\begin{cases} y=kx+1-k, \\ y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}, \end{cases}$ 得点 P 的坐标为(1,1)．所以

$$2|PP_n|^2=2(x_n-1)^2+2(kx_n+1-k-1)^2=8\left(\frac{1}{2k}\right)^{2n}+2\left(\frac{1}{2k}\right)^{2n-2},$$

$$4k^2|PP_1|^2+5=4k^2\left[\left(1-\frac{1}{k}-1\right)^2+(0-1)^2\right]+5=4k^2+9$$

① 当 $|k|>\frac{1}{2}$，即 $k<-\frac{1}{2}$ 或 $k>\frac{1}{2}$ 时，$4k^2|PP_1|^2+5>1+9=10$，而此时，$0<\left|\frac{1}{2k}\right|<1$，所以 $2|PP_n|^2<8\times1+2=10$. 故 $2|PP_n|^2<4k^2|PP_1|^2+5$.

② 当 $0<|k|<\frac{1}{2}$，即 $k\in\left(-\frac{1}{2},0\right)\cup\left(0,\frac{1}{2}\right)$ 时，$4k^2|PP_1|^2+5<1+9=10$，而此时，$\left|\frac{1}{2k}\right|>1$，所以 $2|PP_n|^2>8\times1+2=10$. 故 $2|PP_n|^2>4k^2|PP_1|^2+5$.

说明　解决点列问题的关键，是通过计算求出数列的通项公式或递推关系，将问题转化为数列问题.

例 9　(2005 年重庆市高考理科卷压轴题) 已知一列椭圆 C_n：$x^2+\frac{y^2}{b_n^2}=1(0<b_n<1, n=1,2,\cdots)$. 如图 3-6 若椭圆 C_n 上有一点 P_n，使 P_n 到右准线 l_n 的距离 d_n 是 $|P_nF_n|$ 与 $|P_nG_n|$ 的等差中项，其中 F_n、G_n 分别是 C_n 的左、右焦点.

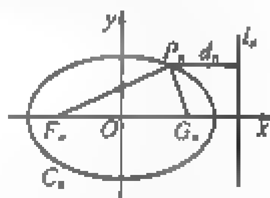


图 3-6

(1) 求证：$b_n\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}(n\geqslant1)$；

(2) 取 $b_n=\frac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$，并用 S_n 表示 $\triangle P_nF_nG_n$ 的面积，试证：$S_1<S_2$ 且 $S_n>S_{n+1}(n\geqslant3)$.

证明　(1) 由已知和椭圆定义得，$2d_n=|P_nF_n|+|P_nG_n|=2$，则 $d_n=1$. 由于准线 l_n 的方程是 $x=\frac{1}{c_n}$（其中 c_n 是 C_n 的半焦距），则 $\frac{1}{c_n}-1\leqslant d_n\leqslant\frac{1}{c_n}+1$ ($c_n<1$)，代入得 $\frac{1}{2}\leqslant c_n<1$，即 $\frac{1}{2}\leqslant\sqrt{1-b_n^2}<1$，解得 $b_n\leqslant\frac{\sqrt{3}}{2}$.

(2) 由于 $b_n=\frac{\sqrt{2n+3}}{n+2}$，则 $c_n=\sqrt{1-b_n^2}=\frac{n+1}{n+2}$. 设 $P_n(x_n,y_n)$，则 $x_n=\frac{1}{c_n}-1=\frac{1}{n+1}$，

则 $$y_n^2=b_n^2\cdot(1-x_n^2)=\frac{2n+3}{(n+2)^2}\cdot\frac{n^2+2n}{(n+1)^2},$$

则 $$S_n^2=(c_n\cdot y_n)^2=\frac{2n^2+3n}{(n+2)^3}.$$

设 $$f(n)=S_n^2,$$

则 $$f'(n)=\frac{(4n+3)(n+2)^3-(2n^2+3n)\cdot3(n+2)^2}{(n+2)^6}=\frac{-2(n^2-n-3)}{(n+2)^4},$$



则当 $n\geqslant3$ 时 $f'(n)<0$，即当 $n\geqslant3$ 时 $f(n)$ 是递减的，$f(n)>f(n+1)$ 亦即 $S_n^2>S_{n+1}^2$ $(n\geqslant3)$，故 $S_n>S_{n+1}(n\geqslant3)$。由于 $S_1=\frac{\sqrt{15}}{9}<\frac{\sqrt{14}}{8}=S_2$，故 $S_1<S_2$。证毕。

评析 在椭圆列 $\{C_n\}$ 的背景中，3 个点列 $\{F_n\}$、$\{G_n\}$、$\{P_n\}$ 在参数 b_n 的影响下伴随移动，并且依次地逐渐左移、右移、接近两坐标轴。

点列问题是多年来数学竞赛的常规题型，是近年来由竞赛迁移到高考的热点题型，其解题的关键是能探求出点列中的某坐标数列的递推关系或通项公式。

点列问题跨越高中数学的多章内容，是开展研究性学习的好情境，是培养基本数学思想的好载体，是命题专家考查数学学习潜力的好题型。

例 10 （2000 年河北高中竞赛题改编题）设一列抛物线 $y^2=2^{n+1}x(n=1,2,3,\cdots)$，分别过每条抛物线的焦点 F_n 作倾斜角为 45° 的弦 A_nB_n，设 $A_n(x_n,y_n)$，$B_n(a_n,b_n)$，且 $y_n<0<b_n$，如图 3-7 所示。

(1) 求数列 $\{x_n\}$、$\{y_n\}$、$\{a_n\}$、$\{b_n\}$ 的通项公式；

(2) 求证：点列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 共线，点列 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 也共线。

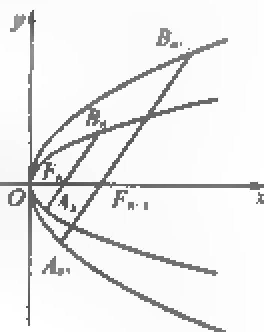


图 3-7

(1) **解** 由于抛物线 $y^2=2^{n+1}\cdot x$ 的焦点 F_n 的坐标为 $(2^{n-1},0)$，则直线 A_nB_n 的方程为 $y=x-2^{n-1}$，与抛物线方程联立，并消去 x 得到 $y^2-2^{n+1}\cdot y-2^{2n}=0$，解得 $y_n=2^n(1-\sqrt{2})$，$b_n=2^n(1+\sqrt{2})$，代入得 $x_n=2^{n-1}(3-2\sqrt{2})$，$a_n=2^{n-1}(3+2\sqrt{2})$。

(2) **证明** 由于两点 A_n、A_{n+1} 的连线斜率

$$k_{A_nA_{n+1}}=\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=\frac{(2^{n+1}-2^n)(1-\sqrt{2})}{(2^n-2^{n-1})(3-2\sqrt{2})}=-2-2\sqrt{2}$$

为常数，则点列 $A_1,A_2,A_3,\cdots$ 共线。同理求得 $k_{B_nB_{n+1}}=-2+2\sqrt{2}$ 也为常数，则点列 $B_1,B_2,B_3,\cdots$ 也共线。

评析 点列问题具有"形"与"数"的双重特征，因此，根据"形"得到"数"的关系是解决该类问题的首要，突破本题的关键是从"形"中得到递推关系的来源。

两个点列 $\{A_n\}$ 和 $\{B_n\}$ 是在抛物线列 $y^2=2^{n+1}\cdot x(n\in\mathbf{N}^*)$ 的背景下生成的，这两个点列可通过焦点列 $\{F_n\}$ 联系起来，将问题转化为等比数列问题。

例 11 由原点 O 向曲线 $y=x^3-3ax^2+bx(a\neq0)$ 引切线，切于异于点 O 的点 $P_1(x_1,y_1)$，再由 P_1 引此曲线的切线，切于不同于 P_1 的点 $P_2(x_2,y_2)$，如此继续，得到点列 $\{P_n(x_n,y_n)\}$。

(1) 求 x_1；



(2) 求 x_n 与 x_{n+1} 的关系；

(3) 若 $a>0$，比较 x_n 与 a 的大小，并加以证明.

解 (1) 因为 $y'=3x^2-6ax+b$，所以切线 OP 的斜率为 $3x_1^2-6ax_1+b$，而 OP 的斜率又为 $\frac{y_1}{x_1}=x_1^2-3ax_1+b$. 于是 $3x_1^2-6ax_1+b=x_1^2-3ax_1+b$. 因为 $x_1\neq 0$，故 $x_1=\frac{3a}{2}$.

(2) 切线 P_nP_{n+1} 的斜率为 $3x_{n+1}^2-6ax_{n+1}+b$，而直线 P_nP_{n+1} 的斜率又为

$$\frac{y_{n+1}-y_n}{x_{n+1}-x_n}=x_{n+1}^2+x_nx_{n+1}+x_n^2-3a(x_n+x_{n+1})+b.$$

于是 $\quad 3x_{n+1}^2-6ax_{n+1}+b=x_{n+1}^2+x_nx_{n+1}+x_n^2-3a(x_n+x_{n+1})+b.$

整理得 $\quad (x_{n+1}-x_n)(2x_{n+1}+x_n-3a)=0.$

但 $x_{n+1}-x_n\neq 0$，所以 $2x_{n+1}+x_n-3a=0$.

(3) 设 $x_{n+1}+\lambda=-\frac{1}{2}(x_n+\lambda)$，得 $x_{n+1}=-\frac{1}{2}x_n-\frac{3}{2}\lambda$，令 $-\frac{3}{2}\lambda=\frac{3}{2}a$，得 $\lambda=-a$，故数列 $\{x_n-a\}$ 是以 $\frac{1}{2}a$ 为首项，公比为 $-\frac{1}{2}$ 的等比数列. 于是 $x_n-a=\frac{1}{2}a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

当 n 为奇数时，$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}>0$，故 $x_n>a$；当 n 为偶数时，$\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}<0$，故 $x_n<a$.

评析 本题以曲线的斜率为背景，以导数的几何意义为依托，通过方程思想建立数列的递推关系，最终通过待定系数法求得等比数列的通项，为分类讨论不等式关系提供了依据.

在中学里，我们可以把函数的导数的几何意义，与它的切线的斜率对应起来，把函数图像上的点的切线的斜率理解为该函数在该点处的一阶导数的值. 函数图像上的点的运动会引起切线位置及对应方程的变化，再通过交轨法形成点列，其对应的坐标就构成了数列. 解决这类问题的思维过程往往与题中描述的数学过程一致.

例 12 设当 $x\in[0,1]$ 时，$f(x+1)=2f(x)$.

(1) 试以 $f(x)$ 表示 $f(x+n)$ 及 $f(x-n)$，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，$x\in[0,1]$；

(2) 如果 $f(x)=x(1-x)$，$x\in[0,1]$，试作 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图像.

解 (1) 当 $n=1$ 时，就是已知

$$f(x+1)=2f(x),x\in[0,1]. \tag{1}$$

当 $n=2$ 时，由式(1)可得

$$f(x+2)=f[(x+1)+1]=2f(x+1)=2\cdot 2f(x)=2^2f(x).$$

猜想 $$f(x+n)=2^nf(x),n\in\mathbf{N}^*,x\in[0,1]. \tag{2}$$



由式(1)有 $$f(x)=\frac{1}{2}f(x+1),$$

故 $$f(x-1)=\frac{1}{2}f(x),x\in[0,1]. \tag{3}$$

由式(3),又有 $f(x-2)=f[(x-1)-1]=\frac{1}{2}f(x-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2^2}f(x)$.

猜想 $$f(x-n)=\frac{1}{2^n}f(x),x\in\mathbf{N}^*,x\in[0,1]. \tag{4}$$

对式(2)与式(4),不难用数学归纳法证明

设 $n=k$ 时,$f(x+k)=2^kf(x)$ 成立,则

$$f(x+k+1)=2f(x+k)=2\cdot2^kf(x)=2^{k+1}f(x),$$

即当 $n=k+1$ 时,(1)式也成立.因此,对一切 $n\in\mathbf{N}^*$,$f(x+n)=2^nf(x)$,$x\in[0,1]$ 成立.同样可证(4)式成立.

(2) 先作出 $f(x)=x(1-x)$,$x\in[0,1]$ 的图像,再根据 $f(x+n)=2^nf(x)$,$f(x-n)=\frac{1}{2^n}f(x)$,$x\in[0,1]$,利用平移和伸缩,作出 $x\in[k,k+1](k\in\mathbf{Z})$ 的图像如图 3-8 所示.

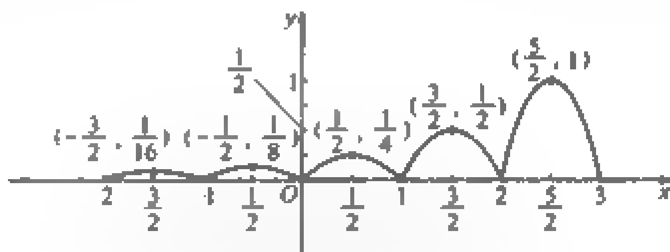


图 3-8

例 13 已知函数 $f(x)=\begin{cases}f_1(x),x\in\left[0,\frac{1}{2}\right),\\f_2(x),x\in\left[\frac{1}{2},1\right],\end{cases}$ 其中 $f_1(x)=1-2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2$,$f_2(x)=-2x+2$.

(1) 画出 $y=f(x)$ 的图像;

(2) 设 $y=f_2(x)\left(x\in\left[\frac{1}{2},1\right]\right)$ 的反函数为 $y=g(x)$,$a_1=1$,$a_2=g(a_1)$,…,$a_n=g(a_{n-1})$,求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(3) 若 $x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$,$x_1=f_1(x_0)$,$f_2(x_1)=x_0$,求 x_0.

解 (1) $y=f(x)$ 的图像如图 3－9。

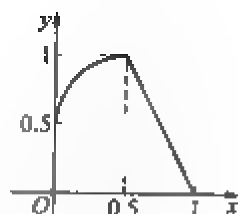


图 3－9

(2) $f_2(x)=-2x+2, x\in\left[\frac{1}{2},1\right]$的反函数为

$$y=1-\frac{1}{2}x, x\in[0,1].$$

解法 1 由已知条件得 $a_1=1$，故 $a_2=1-\frac{1}{2}a_1=1-\frac{1}{2}$，同理

$$a_3=1-\frac{1}{2}a_2=1-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=1-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$=\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2,$$

$$a_4=\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)^3,$$

…

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^0+\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$=\frac{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$$

解法 2 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+1.$

设 $a_n+\lambda=-\frac{1}{2}(a_{n-1}+\lambda)$，即 $a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}-\frac{3}{2}\lambda.$

令 $-\frac{3}{2}\lambda=1$，得 $\lambda=-\frac{2}{3}$. 于是数列$\left\{a_n-\frac{2}{3}\right\}$是以$\frac{1}{3}$为首项，$-\frac{1}{2}$为公比的等比数列. 故 $a_n-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，即 $a_n=\frac{2}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right].$

(3) 由已知 $x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，$x_1=f_1(x_0)=1-2\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2$，$f_1(x)$ 的值域为$\left[\frac{1}{2},1\right)$，

故 $f_2(x_1)=2-2x_1=2-2\left[1-2\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2\right]=4\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2$

由 $f_2(x_1)=x_0$，即 $4\left(x_0-\frac{1}{2}\right)^2=x_0$，整理得 $4x_0^2-5x_0+1=0$，得 $x_0=1, x_0=\frac{1}{4}$

因为 $x_0\in\left[0,\frac{1}{2}\right)$，故取 $x_0=\frac{1}{4}$.



例 14 对任意函数 $f(x)$，$x\in D$，可按图 3-10 构造一个数列发生器，其工作原理如下：

① 输入数据 $x_0\in D$，经数列发生器输出 $x_1=f(x_0)$；② 若 $x_1\notin D$，则数列发生器结束工作；若 $x_1\in D$，则将 x_1 反馈回输入端，再输出 $x_2=f(x_1)$，并按此规律继续下去。

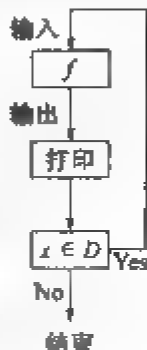


图 3-10

现定义 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}$。

(1) 若输入 $x_0=\dfrac{49}{65}$，则由数列发生器产生数列 $\{x_n\}$，请写出 $\{x_n\}$ 的所有项；

(2) 若要数列发生器产生一个无穷的常数列，试求输入的初始数据 x_0 的值；

(3) 若输入 x_0 时，产生的无穷数列 $\{x_n\}$ 满足对任意正整数 n 均有 $x_n<x_{n+1}$，求 x_0 的取值范围。

解 (1) 因为 $f(x)$ 的定义域为 $D=(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$，所以数列 $\{x_n\}$ 只有 3 项：$x_1=\dfrac{11}{19}$，$x_2=\dfrac{1}{5}$，$x_3=-1$。

(2) 因为 $f(x)=\dfrac{4x-2}{x+1}=x$，即 $x^2-3x+2=0$。所以 $x=1$ 或 $x=2$，即 $x_0=1$ 或 2 时，$x_{n+1}=\dfrac{4x_n-2}{x_n+1}=x_n$。故当 $x_0=1$ 时，$x_n=1$；当 $x_0=2$ 时，$x_n=2$，$(n\in\mathbf{N}^*)$。

(3) 解不等式 $x<\dfrac{4x-2}{x+1}$ 得 $x<-1$ 或 $1<x<2$。

要使 $x_1<x_2$，则对于函数

$$f(x)=\frac{4x-2}{x+1}=4-\frac{6}{x+1}.$$

若 $x_1<-1$，则 $x_2=f(x_1)>4$，$x_3=f(x_2)<x_2$；

当 $1<x_1<2$ 时，$x_2=f(x_1)>x_1$ 且 $1<x_2<2$；

以此类推可得数列 $\{x_n\}$ 的所有项均满足 $x_{n+1}>x_n\ (n\in\mathbf{N}^*)$。

综上所述，$x_1\in(1,2)$。由 $x_1=f(x_0)$ 得 $x_0\in(1,2)$。

说明 这是一道富有新意，综合性、抽象性较强的题目。由于本题题意不易理解，可先将它转化为数学语言后求解。这就要求我们慎读题意，把握主脉，体会数学转换。

例 15 已知 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上有定义，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，且满足当 $x,y\in(-1,1)$ 时，有 $f(x)-f(y)=f\left(\dfrac{x-y}{1-xy}\right)$，数列 $\{x_n\}$ 中有 $x_1=\dfrac{1}{2}$，$x_{n+1}=\dfrac{2x_n}{1+x_n^2}$。

(1) 求证：$f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数；

(2) 求 $f(x_n)$ 的表达式；

(3) 是否存在自然数 m，使得对于任意 $n\in \mathbf{N}^*$，有 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}<\frac{m-8}{4}$ 成立？若存在，求出 m 的最小值.

解 (1) 当 $x=y=0$ 时，$f(0)=0$；令 $x=0$，得 $f(0)-f(y)=f(-y)$，即 $f(y)+f(-y)=0$，所以对于任意的 $x\in(-1,1)$，有 $f(x)+f(-x)=0$，故 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数.

(2) 因为 $\{x_n\}$ 满足 $x_1=\frac{1}{2}$，$x_{n+1}=\frac{2x_n}{1+x_n^2}$，所以 $0<x_n<1$，因此

$$f(x_n)-f(-x_n)=f\left[\frac{x_n-(-x_n)}{1-x_n(-x_n)}\right]=f\left(\frac{2x_n}{1+x_n^2}\right).$$

又 $f(x)$ 在 $(-1,1)$ 上为奇函数，所以 $f(x_{n+1})=2f(x_n)$，由 $f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，$x_1=\frac{1}{2}$，得 $f(x_1)=1$，从而 $f(x_n)=2^{n-1}$.

(3) $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=2-\frac{1}{2^{n-1}}$.

假设存在自然数 m，使得对于任意 $n\in \mathbf{N}^*$，有 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}<\frac{m-8}{4}$ 成立，即 $2-\frac{1}{2^{n}}<\frac{m-8}{4}$ 恒成立. 由 $\frac{m-8}{4}\geqslant 2$，解得 $m\geqslant 16$. 所以存在自然数 $m\geqslant 16$，使得对于任意 $n\in \mathbf{N}^*$ 有 $\frac{1}{f(x_1)}+\frac{1}{f(x_2)}+\cdots+\frac{1}{f(x_n)}<\frac{m-8}{4}$ 成立. 此时 m 的最小值为 16.

说明 本题将函数、数列和不等式的知识有机结合，是难得一见的好题. 解决本题的关键是赋值法在函数方程中的应用，以及数列通项公式的推导和不等式恒成立问题的转化.

能力训练

1. 已知数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 $a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}(n\in \mathbf{N}^*)$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 30 项中最大项与最小项分别为 ( )

A. a_1, a_{20}　　B. a_1, a_9　　C. a_{10}, a_{11}　　D. a_{10}, a_9

2. 等差数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n，且$S_2 = 10, S_4 = 36$，则过点$P(n, a_n)$和$Q(n+2, a_{n+2})(n \in \mathbf{N}^*)$的直线的一个方向向量的坐标可以是（　　）

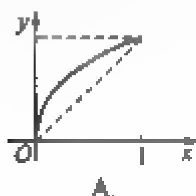
A. $(-1, -1)$　　B. $\left(-\frac{1}{2}, -2\right)$

C. $\left(-\frac{1}{2}, -1\right)$　　D. $\left(2, \frac{1}{2}\right)$

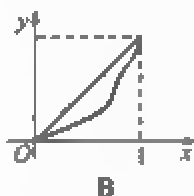
3. 已知函数$f(x)=\begin{cases}(3-a)x-3, & x \leqslant 7, \\ a^{x-6}, & x > 7,\end{cases}$数列$\{a_n\}$满足$a_n = f(n)(n \in \mathbf{N}^*)$，且$\{a_n\}$是递增数列，则实数$a$的取值范围是（　　）

A. $(1, 3)$　　B. $(2, 3)$　　C. $\left(\frac{9}{4}, 3\right)$　　D. $\left[\frac{9}{4}, 3\right)$

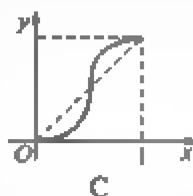
4. （2005年辽宁省高考理科卷试题）一给定函数$y=f(x)$的图像在图3-11中，并且对任意$a_1 \in (0,1)$，由关系式$a_{n+1}=f(a_n)$得到的数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}>a_n(n\in \mathbf{N}^*)$，则该函数的图像是（　　）



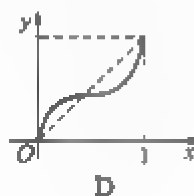
A



B



C



D

图 3-11

5. 函数$y = f(x)$满足$f(1) = \lg \frac{1}{a}$，且当$x \geqslant 2$时，$f(x-1) = f(x) - \lg a^x$ $(a > 0, x \in \mathbf{N}^*)$，运用数列叠加求通项方法可类比求得函数$f(x)$的表达式为________.

6. （第12届"希望杯"试题改编）设$f_1(x) = 1-|x|$，$f_n(x) = 1-|f_{n-1}(x)|$，$n \in \mathbf{N}^*$，且$n > 1$，则$f_{2007}(2008) =$________.

7. （第13届"希望杯"高一竞赛题）设函数$y = 3 - 0.6x$与函数$y = 0.6x$的图像交于点$P(x_1, y_1)$，对任意$n \in \mathbf{N}^*$且$n > 1$，将过点$(0,3)$和点$(x_{n-1}, 0)$的直线与直线$y = 0.6x$的交点的坐标记为$P_n(x_n, y_n)$，则点P_1, P_2, P_3的坐标依次为________，点P_{2002}的坐标为________.

8. （第14届"希望杯"高一第1试题）设$f_1(x) = \frac{2}{x+1}$，而$f_{n+1}(x) = f_1[f_n(x)]$，$n \in \mathbf{N}^*$，记$a_n = \frac{f_n(2)-1}{f_n(2)+2}$，则$a_{99} =$________.

9 (2006年湖北省高考理科卷第17题)已知二次函数 $y=f(x)$ 的图像经过坐标原点,其导函数为 $f'(x)=6x-2$,数列$\{a_n\}$的前 n 项和为 S_n,点$(n,S_n)(n\in\mathbf{N}^*)$均在函数 $y=f(x)$ 的图像上.

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设 $b_n=\dfrac{3}{a_na_{n+1}}$,$T_n$ 是数列$\{b_n\}$的前 n 项和,求使得 $T_n<\dfrac{m}{20}$ 对所有 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立的最小正整数 m.

10. 如图3-12,在 y 轴的正半轴上依次有点 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 其中点 $A_1(0,1)$,$A_2(0,10)$,且 $|A_{n-1}A_n|=3|A_nA_{n+1}|$ $(n=2,3,4,\cdots)$,在射线 $y=x(x\geqslant 0)$ 上依次有点 $B_1,B_2,\cdots,B_n,\cdots$,点$B_1$ 的坐标为$(3,3)$,且 $|OB_n|=|OB_{n-1}|+2\sqrt{2}(n=2,3,4,\cdots)$

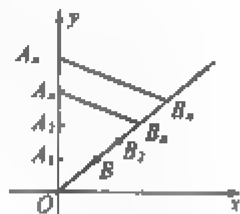


图3-12

(1) 用含 n 的式子表示$|A_nA_{n+1}|$;

(2) 用含 n 的式子表示 A_n,B_n 的坐标;

(3) 求四边形 $A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$ 面积的最大值

11. 已知 x 轴上有一点列:$P_0(x_0,0)$,$P_1(x_1,0)$,$P_2(x_2,0)$,$\cdots$,且 $\boldsymbol{P_nP_{n+1}}=\lambda\boldsymbol{P_{n+2}P_{n+1}}$,其中 $n\in\mathbf{N}$,$\lambda>0$ 且为常数,$x_0=0$,$x_1=1$,设 $a_n=x_{n+1}-x_n$.

(1) 证明$\{a_n\}$是等比数列,并求数列$\{a_n\}$的通项公式;

(2) 设 $f(\lambda)=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,当 λ 变化时,求 $f(\lambda)$ 的取值范围.

12 在 xOy 平面上有一点列 $P_1(a_1,b_1)$,$P_2(a_2,b_2)$,$\cdots$,$P_n(a_n,b_n)$,$\cdots$,对每个正整数 n,点 P_n 位于函数 $y=2000\left(\dfrac{a}{10}\right)^x(0<a<10)$ 的图像上,且点 P_n,点 $A(n,0)$ 与点 $B(n+1,0)$ 构成一个以 P_n 为顶点的等腰三角形.

(1) 求点 P_n 的纵坐标 b_n 的表达式;

(2) 若对每个正整数 n,以 b_n,b_{n+1},b_{n+2} 为边长能构成一个三角形,求 a 的取值范围;

(3) 设 $B_n=b_1b_2\cdots b_n(n\in\mathbf{N}^*)$,若 a 取问(2)中确定的范围内的最小整数,求数列$\{B_n\}$的最大项的项数.

13. 在 x 轴上有一列点 $P_1,P_2,\cdots,P_n,\cdots$,已知当 $n\geqslant 2$ 时,点 P_n 是把线段 $P_{n-1}P_{n+1}$ 作 n 等分的分点中最靠近 P_{n+1} 的点,设线段 P_1P_2,P_2P_3,$\cdots$,P_nP_{n+1} 的长度为 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,其中 $a_1=1$.

(1) 写出 a_2,a_3 和 $a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$ 的表达式(不必证明);

(2) 证明:$a_1+a_2+\cdots+a_n<3$;

(3) 设点 $M_n(n,a_n)(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^*)$,在这些点中是否存在两点同时在函数 $y=\dfrac{k}{(x-1)^2}(x>0)$ 的图像上,如果存在,请求出点的坐标;如果不存在,请说明理由



14. 如图 3-13，已知曲线 $C: y=\frac{1}{x}$，$C_n: y=\frac{1}{x+2^{-n}}$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 从 C 上的点 $Q_n(x_n, y_n)$ 作 x 轴的垂线，交 C_n 于点 P_n，再从点 P_n 作 y 轴的垂线，交 C 于点 $Q_{n+1}(x_{n+1}, y_{n+1})$，设 $x_1=1$，$a_n=x_{n+1}-x_n$，$b_n=y_n-y_{n+1}$.

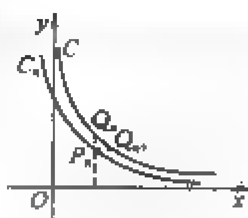


图 3-13

(1) 求 Q_1，Q_2 的坐标；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(3) 记数列 $\{a_n\cdot b_n\}$ 的前 n 项为和为 S_n，求证：$S_n<\frac{1}{3}$.

15. 已知 $f(x)=\frac{1}{4^x+2}(x\in\mathbf{R})$，$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ 是函数 $y=f(x)$ 图像上的两点，且线段 P_1P_2 中点 P 的横坐标是 $\frac{1}{2}$.

(1) 求证：点 P 的纵坐标是定值；

(2) 若数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=f\left(\frac{n}{m}\right)(m\in\mathbf{N}^*, n=1,2,\cdots,m)$，求数列 $\{a_n\}$ 的前 m 项和 S_m；

(3) 若 $m\in\mathbf{N}^*$ 时，不等式 $\frac{t^m}{S_m}<\frac{t^{m+1}}{S_{m+1}}$ 恒成立，求实数 t 的取值范围.

16. 已知实数 $c\geqslant 0$，曲线 $C: y=\sqrt{x}$ 与直线 $l: y=x-c$ 交于一点 $P(a, \sqrt{a})$（异于原点 O），在曲线 C 上取一点 $P_1(x_1, y_1)$，过点 P_n 作 $P_nQ_n\parallel x$ 轴交 l 于点 Q_n，过点 Q_n 作 $Q_nP_{n+1}\parallel y$ 轴交 C 于 P_{n+1}，其中 $n\in\mathbf{N}^*$，设 $x_1=b$，且 $0<b<a$，设 $P_n(x_n, y_n)$.

(1) 试用 c 表示 a，并证明 $a\geqslant 1$；

(2) 试证明 $x_2>x_1$，且 $x_n<a(n\in\mathbf{N}^*)$；

(3) 当 $c=0$ 且 $b\geqslant\frac{1}{2}$ 时，求证：$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+2}}<\frac{\sqrt{2}}{2}(k, n\in\mathbf{N}^*)$.

17. 过曲线 $C: y=x^3$ 上 $P_1(x_1, y_1)$ 点作曲线 C 的切线 l_1 与曲线 C 交于 $P_2(x_2, y_2)$，过 P_2 作曲线 C 的切线 l_2 与曲线 C 交于 $P_3(x_3, y_3)$，以此类推，可得到点列：$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$，…，$P_n(x_n, y_n)$，…. 已知 $x_1=1$，$y_1=1$.

(1) 求 x_n，y_n.

(2) 记 P_n 到直线 l_{n+1}（即直线 $P_{n+1}P_{n+2}$）的距离为 d_n. 求证：$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n}>\frac{8}{9}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$.

18. 已知正项数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=6$，点 $A_n(a_n, \sqrt{a_{n+1}})$ 在抛物线 $y^2=x+1$ 上；数列 $\{b_n\}$

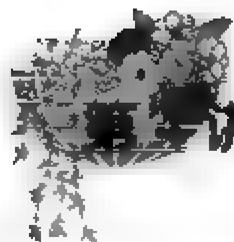
中，点 $B_n(n,b_n)$ 在过点(0,1)，以(1,2)为方向向量的直线上.

(1) 求数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的通项公式；

(2) 若 $f(n)=\begin{cases}a_n, & n\text{为奇数},\\ b_n, & n\text{为偶数},\end{cases}$ 问是否存在 $k\in\mathbf{N}$，使 $f(k+27)=4f(k)$ 成立，若存在，求出 k 值；若不存在，说明理由；

(3) 对任意正整数 n，不等式 $\dfrac{a^{n+1}}{\left(1+\dfrac{1}{b_1}\right)\left(1+\dfrac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{b_n}\right)}-\dfrac{a^n}{\sqrt{n-2+a_n}}\leqslant 0$ 成立，求正数 a 的取值范围.





第 讲　多元递推

知识扫描

中学阶段涉及的多元递推主要有：

(1) 线性递推方程组.设 $m(m\geqslant 2)$ 个数列 $\{a_n^{(1)}\}, \{a_n^{(2)}\}, \cdots, \{a_n^{(m)}\}$ 的首项分别为 $a_1^{(1)}$，$a_1^{(2)}, \cdots, a_1^{(m)}$，且这 m 个数列满足如下关系：

$$\begin{cases} a_{n+1}^{(1)} = \alpha_{1,1}a_n^{(1)} + \alpha_{1,2}a_n^{(2)} + \cdots + \alpha_{1,m}a_n^{(m)} + \gamma_1, \\ a_{n+1}^{(2)} = \alpha_{2,1}a_n^{(1)} + \alpha_{2,2}a_n^{(2)} + \cdots + \alpha_{2,m}a_n^{(m)} + \gamma_2, \\ \cdots \\ a_{n+1}^{(m)} = \alpha_{m,1}a_n^{(1)} + \alpha_{m,2}a_n^{(2)} + \cdots + \alpha_{m,m}a_n^{(m)} + \gamma_m, \end{cases} (n \in \mathbf{N}^*).$$

其中 $\alpha_{i,j}, \gamma_i (i, j = 1, 2, \cdots, m)$ 都是常数，且 $\alpha_{i,m} (i = 1, 2, \cdots, m)$ 不全为 0，则称这个递推式组为线性递推式方程组，这 m 个数列称为由递推方程组给定的数列

(2) 多元函数列.含有 $f(i, j)$ 等关系式.

(3) 一个递推方程中含有的多元递推关系.求解多元递推问题的常用数学思想方法有：消元法、换元法、猜想证明法、不等式法及优化假设等.

多元递推数列问题，在高考和竞赛中时有出现.2007 年全国高中数学联合竞赛第 2 试压轴题就是多元函数问题，命题趋势应引起足够的重视.

例题分析

例 1　这是一个计算机程序的操作说明：

① 初始值 $x = 1, y = 1, z = 0, n = 0$；

② $n = n + 1$(将当前 $n + 1$ 的值赋予新的 n)；



③ $x=x+2$(将当前 $x+2$ 的值赋予新的 x);

④ $y=2y$(将当前 $2y$ 的值赋予新的 y);

⑤ $z=z+xy$(将当前 $z+xy$ 的值赋予新的 z);

⑥ 如果 $z>7000$,执行语句⑦,否则返回语句②;

⑦ 打印 n,z;

⑧ 程序终止.

语句⑦打印出的数值为________,________.写出计算过程.

解 设 $n=i$ 时,x,y,z 的值分别为 x_i,y_i,z_i. 依题意,$x_0=1$,$x_n=x_{n-1}+2$,所以 $\{x_n\}$ 是等差数列,且 $x_n=2n+1$. $y_0=1$,$y_n=2y_{n-1}$,可见 $\{y_n\}$ 是等比数列,且 $y_n=2^n$,$z_0=0$,$z_n=z_{n-1}+x_ny_n$,所以

$$z_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n=3\cdot2+5\cdot2^2+7\cdot2^3+\cdots+(2n+1)\cdot2^n. \quad (1)$$

所以 $$2z_n=3\cdot2^2+5\cdot2^3+7\cdot2^4+\cdots+(2n-1)\cdot2^n+(2n+1)\cdot2^{n+1}. \quad (2)$$

(2)式 − (1)式,得

$$z_n=-3\cdot2-2\cdot2^2-2\cdot2^3-\cdots-2\cdot2^n+(2n+1)\cdot2^{n+1}=-2^{n+2}+2+(2n+1)2^{n+1}$$

$$=(2n-1)\cdot2^{n+1}+2.$$

依题意,程序终止时 $z_n>7000$,$z_{n-1}\leqslant7000$,即 $\begin{cases}(2n-1)2^{n+1}+2>7000,\\(2n-3)2^n+2\leqslant7000,\end{cases}$ 可求得 $n=8$,$z=7682$.

说明 此题的关键是从题目中读出数学本质;理解赋值语句"$n=n+1$","$x=x+2$","$y=2y$","$z=z+xy$"的数学含义,它们分别构成累加器(生成一个等差数列)或累乘器(生成一个等比数列).

例2 甲乙丙三人玩传球游戏,由甲先传给乙丙中的一个,再由得到球的人把球传给另外两人中的一人,以此下去.如把甲第1次球在手未传出时认为甲第一次得到球,求第6次球再次到甲的手中的情况有多少种?

分析 我们把乙丙称为非甲,简称"非",为便于讨论,我们先画出树形图 如图4-1所示.

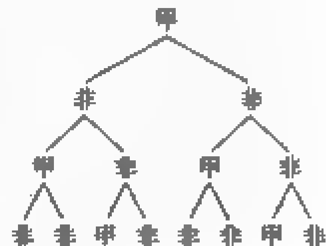


图4-1


图中的结构有甲(→非,→非)和非(→甲,→非)两种.我们设第 n 次甲得到球的情况有 a_n 种,第 n 次"非"得到球的情况有 b_n 种,根据以上结构,能建立以下递推关系 $\begin{cases}a_{n+1}=b_n,\\b_{n+1}=2a_n+b_n,\end{cases}$ 其中,



$a_1 = 1, b_1 = 0, a_2 = 0, b_2 = 2.$

于是得
$$a_{n+2} = 2a_n + a_{n+1}, a_1 = 1, a_2 = 0 \tag{1}$$

设 $a_{n+2} - \alpha a_{n+1} = \beta(a_{n+1} - \alpha a_n)$，即 $a_{n+2} = (\alpha + \beta)a_{n+1} - \alpha\beta a_n$，于是 $\alpha + \beta = 1$，$\alpha\beta = -2$，因而得 $\alpha = 2$，$\beta = -1$ 或 $\alpha = -1$，$\beta = 2$. 这样(1)式可变为

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = -(a_{n+1} - 2a_n) \tag{2}$$

及
$$a_{n+2} + a_n = 2(a_{n+1} + a_n). \tag{3}$$

(2)式的初始条件为 $a_2 - 2a_1 = -2$，于是由(2)式得

$$a_{n+1} - 2a_n = 2(-1)^n. \tag{4}$$

(3)式的初始条件为 $a_2 + a_1 = 2$，于是由(3)式得

$$a_{n+1} + a_n = 2^{n-1}. \tag{5}$$

由(4)式和(5)式得 $a_n = \frac{2^n - 2(-1)^n}{3}$. 此式为问题的一般解.

依次可得 $a_1 = 2$，$a_2 = 0$，$a_3 = 2$，$a_4 = 2$，$a_5 = 6$，$a_6 = 10$，这里 $a_6 = 10$ 为开始提出问题的答案. 此外，若将人数变成多个，仍分甲及非甲(即"非")，也可用此方法解决.

说明 求解过程体现转化思想，即通过消元将多元递推式转化为一元递推式. 一般地，二元一阶线性递推式 $\begin{cases} x_{n+1} = ax_n + by_n \\ y_{n+1} = cx_n + dy_n \end{cases}$

由于
$$\begin{aligned} x_{n+2} &= ax_{n+1} + by_{n+1} \\ &= ax_{n+1} + b(cx_n + dy_n) \\ &= ax_{n+1} + b\left(cx_n + d\frac{x_{n+1} - ax_n}{b}\right) \\ &= ax_{n+1} + bcx_n + dx_{n+1} - adx_n \\ &= (a+d)x_{n+1} + (bc - ad)x_n, \end{aligned}$$

同理
$$y_{n+2} = (a+d)y_{n+1} + (bc - ad)y_n,$$

因此，可转化为二阶线性递推式解决.

例3 现有流量为 $300\text{m}^3/\text{s}$ 的两条河流 A、B 汇合于某处后，不断混合，它们的含沙量分别为 2kg/m^3 和 0.2kg/m^3. 假设从汇合处开始，沿岸设若干个观测点，两股水流经相邻两个观测点的过程中，其混合效果相当于两股水流在单位时间内交换 100m^3 的水量，即从 A 河流入 B 河 100m^3 的水，经混合后，又从 B 河流入 A 河 100m^3 水并混合，问从第几个观测点开始，两股河水的含沙量之差小于 0.1kg/m^3(不考虑泥沙沉淀)?

分析 两股水流其混合效果相当于单位时间内两股水流交换 100m^3 的水量，我们把 A 股水流和 B 股水流的含沙量分别看成两个数列 $\{a_n\}$、$\{b_n\}$，那么这两个数列交叉递推，



循环上升,且不容易把它们分割开来,所以考虑采用联立方程的办法来解.

第 n 个观测点 A 股水流的含沙量为 a_n,B 股水流的含沙量为 b_n;第 $n-1$ 个观测点 A 股水流含沙量为 a_{n-1},B 股水流的含沙量为 b_{n-1}. 从第 $n-1$ 个观测点到第 n 个观测点之间进行了交换,关系如下:①A 股水流流入 B 股水流 $100m^3$ 水量,其中含沙量 $100a_{n-1}$,这样的 B 股水流中含沙 $300b_{n-1}+100a_{n-1}$;② 从 B 股水流流入 A 股水流 $100m^3$ 的水量,其中含沙 $\frac{100}{400}(300b_{n-1}+100a_{n-1})$. 所以在 B 股水流流入 A 股水流 $100m^3$ 水量后

A 股水流中含泥沙:$200a_{n-1}+\frac{100}{400}(300b_{n-1}+100a_{n-1})=\frac{1}{4}(300b_{n-1}+900a_{n-1})$;

B 股水流中含泥沙:$300b_{n-1}+100a_{n-1}-\frac{100}{400}(300b_{n-1}+100a_{n-1})$

$$=\frac{1}{4}(900b_{n-1}+300a_{n-1}).$$

综上所述,A、B 两股水流在第 n 个观测点的含沙量分别为:

$$\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{4}(300b_{n-1}+900a_{n-1})=\frac{1}{4}(3a_{n-1}+b_{n-1}),$$

$$\frac{1}{300}\cdot\frac{1}{4}(900b_{n-1}+300a_{n-1})=\frac{1}{4}(3b_{n-1}+a_{n-1}).$$

所以有 $\begin{cases}a_n=\frac{1}{4}(3a_{n-1}+b_{n-1}),\\ b_n=\frac{1}{4}(a_{n-1}+3b_{n-1}),\end{cases}$ 由此可得

$$a_n-b_n=\frac{1}{2}(a_{n-1}-b_{n-1})=\cdots=\frac{a_1-b_1}{2^{n-1}}=\frac{1.8}{2^{n-1}}<\frac{1}{10}.$$

解得 $n\geqslant 6$,即从第 6 个观测点开始,两股水流含沙量之差小于 $0.1kg/m^3$.

说明 例 2、例 3 中用的是一种特殊的递推方法——"跷跷板递推法",也称"螺旋上升递推法"或"交叉递推法". 这种方法有时有助于解决一些疑难问题.

如:一个特殊的数列 1,2,5,10,21,42,85,170,341,682,…,要探求它的构成法则比较困难,但如果将其按奇数项和偶数项分成下面两个数列:

1, 5, 21, 85, 341, …　　记通项为 a_n

2, 10, 42, 170, 682…　　记通项为 b_n

则容易得到 $b_n=2a_n$,$a_{n+1}=2b_n+1$.

记原数列为 u_n,则构成法则为 $u_{2m}=2u_{2m-1}$,$u_{2m+1}=2u_{2m}+1$,$u_1=1$,m 为正整数. 利



用循环数列通项公式的计算方法，进一步可得$a_n=\frac{1}{6}[2^{n+2}-3+(-1)^{n+1}]$（计算过程略）。

例 4 设数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足：$a_1=2$，$b_1=\sqrt{2}$，$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$，$b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$，求数列通项$a_n$、$b_n$。

解 题给2个递推式与三角恒等式$\frac{2\tan\alpha\sin\alpha}{\tan\alpha+\sin\alpha}=2\tan\frac{\alpha}{2}$，$\sqrt{2\tan\frac{\alpha}{2}\sin\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}$非常相似，于是，作三角代换$a_1=2\tan\frac{\pi}{4}$，$b_1=2\sin\frac{\pi}{4}$，代入递推式，得

$$a_2=\frac{2a_1b_1}{a_1+b_1}=2^2\tan\frac{\pi}{2^3},\ b_2=\sqrt{a_2b_1}=2^2\sin\frac{\pi}{2^3},\ a_3=\frac{2a_2b_2}{a_2+b_2}=2^3\tan\frac{\pi}{2^4},$$

$$b_3=\sqrt{a_3b_2}=2^3\sin\frac{\pi}{2^4},\ \cdots,\ a_n=\frac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}=2^n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}},\ b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}=2^n\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}.$$

说明 有些多元递推式的结构与三角函数中某些三角公式或三角恒等式的结构相同，可以类比有关三角公式及三角恒等式，通过三角代换，借助于三角运算，使问题完美而精巧地得到解决

例 5 已知数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足，$a_1=b_1=\frac{1}{2}$，$a_n=a_{n-1}b_n$，$b_n=\frac{b_{n-1}}{1-a_{n-1}^2}$，求数列通项$a_n$，$b_n$

解 当$n=2$时，$b_2=\frac{b_1}{1-a_1^2}=\frac{2}{3}$，$a_2=a_1b_2=\frac{1}{3}$，当$n=3$时，$b_3=\frac{b_2}{1-a_2^2}=\frac{3}{4}$，$a_3=a_2b_3=\frac{1}{4}$，当$n=4$时，$b_4=\frac{b_3}{1-a_3^2}=\frac{4}{5}$，$a_4=a_3b_4=\frac{1}{5}$，…，猜想$a_n=\frac{1}{n+1}$，$b_n=\frac{n}{n+1}$. 用数学归纳法证，略.

说明 当多元递推式比较复杂时，我们不妨先求出前几项，通过分析，找出规律，提出猜想，然后用数学归纳法严格证明.

例 6 （2002年澳大利亚国家数学竞赛题）已知有足够多个1×1的正方形和2×1的多米诺骨牌 设$n\geq3$是整数，问拼成$3\times n$的长方形有多少种不同的方法，其中多米诺骨牌较长的边与长方形边长为3的边平行，且任意两块多米诺骨牌均不相邻.

解 假设长方形边长为3的边为竖直方向，每一列要么是上面为一块多米诺骨牌，下面为一块单位正方形；要么是上面为一块单位正方形，下面为一块多米诺骨牌；要么是三块单位正方形.

对于$3\times n$的长方形，设最右面的一列是上面为一块多米诺骨牌、下面为一块单位正方形时，有a_n种不同的拼法；最右面的一列是上面为一块单位正方形，下面为一块多米诺



骨牌时，有 b_n 种不同的拼法；最右面的一列是二块单位正方形时，有 c_n 种不同的拼法，于是，$a_1 = b_1 = c_1 = 1$。

因为在包含一块多米诺骨牌的列的左边且与其相邻的那一列只能是二块单位正方形；在包含二块单位正方形的列的左边且与其相邻的那一列有三种可能的组合，所以，$a_{n+1} = c_n$，$b_{n+1} = c_n$，$c_{n+1} = a_n + b_n + c_n$。因此，只需求 $d_n = a_n + b_n + c_n$ 的值。因为 $d_{n+1} = a_{n+1} + b_{n+1} + c_{n+1} = c_n + c_n + a_n + b_n + c_n = d_n + 2\times(a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}) = d_n + 2d_{n-1}$。所以 $d_{n+1} - d_n - 2d_{n-1} = 0$。特征方程为 $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$，特征根是 -1 和 2。

令 $d_n = A(-1)^n + B\cdot 2^n$（$A$、$B$ 为待定常数）。

因为 $d_1 = a_1 + b_1 + c_1 = 3$，$d_2 = a_2 + b_2 + c_2 = c_1 + c_1 + a_1 + b_1 + c_1 = 5$，

所以 $\begin{cases} -A + 2B = 3, \\ A + 4B = 5, \end{cases}$ 所以 $\begin{cases} A = -\dfrac{1}{3}, \\ B = \dfrac{4}{3}, \end{cases}$ 所以 $d_n = \dfrac{1}{3}[(-1)^{n+1} + 2^{n+2}]$。

例 7 （2000 年全国高中数学联合竞赛加试题）

设数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 满足 $a_0 = 1$、$b_0 = 0$ 且 $\begin{cases} a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3, \\ b_{n+1} = 8a_n + 7b_n - 4, \end{cases}$ $n = 0, 1, 2, \cdots$ 求证：$a_n (n = 0, 1, 2, \cdots)$ 是完全平方数。

证法 1 由假设得 $a_1 = 4$，$b_1 = 4$，且当 $n \geqslant 1$ 时

$$(2a_{n+1} - 1) + \sqrt{3}b_{n+1} = [(2a_n - 1) + \sqrt{3}b_n](7 + 4\sqrt{3}).$$

以此类推，可得

$$(2a_n - 1) + \sqrt{3}b_n = (7 + 4\sqrt{3})^{n-1}(2a_1 - 1 + \sqrt{3}b_1) = (7 + 4\sqrt{3})^n.$$

同理 $$(2a_n - 1) - \sqrt{3}b_n = (7 - 4\sqrt{3})^n.$$

上面两式相加，得 $a_n = \dfrac{1}{4}(7 + 4\sqrt{3})^n + \dfrac{1}{4}(7 - 4\sqrt{3})^n + \dfrac{1}{2}$。

由于 $7 \pm 4\sqrt{3} = (2 \pm \sqrt{3})^2$，所以 $a_n = [\dfrac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \dfrac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n]^2$。

由二项式展开，得 $c_n = \dfrac{1}{2}(2 + \sqrt{3})^n + \dfrac{1}{2}(2 - \sqrt{3})^n = \sum\limits_{0 \leqslant 2k \leqslant n} C_n^{2k} \cdot 3^k \cdot 2^{n-2k}$，

显然 c_n 为整数，于是 a_n 为完全平方数。

证法 2 由已知，得 $a_{n+1} = 7a_n + 6b_n - 3 = 7a_n + 6(8a_{n-1} + 7b_{n-1} - 4) - 3$

$$= 7a_n + 48a_{n-1} + 42b_{n-1} - 27.$$

由 $a_n = 7a_{n-1} + 6b_{n-1} - 3$，得 $42b_{n-1} = 7a_n - 49a_{n-1} + 21$，



从而，$a_{n+1} = 7a_n + 48a_{n-1} + 7a_n - 49a_{n-1} + 21 - 27 = 14a_n - a_{n-1} - 6$.

由 $a_0 = 1 = 1^2$，$a_1 = 4 = 2^2$，$a_2 = 49 = 7^2$，设 $c_{n+1} = 4c_n - c_{n-1}$，$c_0 = 1$，$c_1 = 2$，$c_2 = 7$.

由归纳法易知数列 $\{c_n\}$ 是惟一确定的正整数数列.

令 $d_n = c_n^2$，则 $d_{n+1} = c_{n+1}^2 = (4c_n - c_{n-1})^2 = 16c_n^2 - 8c_nc_{n-1} + c_{n-1}^2$

$$= 14c_n^2 - c_{n-1}^2 - 6 - 2(4c_nc_{n-1} - c_n^2 - 3).$$

而
$$\begin{aligned}
&4c_nc_{n-1} - c_n^2 - c_{n-1}^2 - 3 = 4c_nc_{n-1} - c_n(4c_{n-1} - c_{n-2}) - c_{n-1}^2 - 3 \\
&= c_nc_{n-2} - c_{n-1}^2 - 3 \\
&= (4c_{n-1} - c_{n-2})c_{n-2} - c_{n-1}(4c_{n-2} - c_{n-3}) - 3 \\
&= c_{n-1}c_{n-3} - c_{n-2}^2 - 3 \\
&= \cdots \\
&= c_2c_0 - c_1^2 - 3 = 0
\end{aligned}$$

故 $d_{n+1} = 14d_n - d_{n-1} - 6$，$d_0 = 1$，$d_1 = 4$. 由惟一性得：$a_n = d_n = c_n^2$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，故 a_n 是完全平方数.

证法 3 由题设，得 $a_{n+1} = 14a_n - a_{n-1} - 6$.

故
$$a_{n+1} - \frac{1}{2} = 14\left(a_n - \frac{1}{2}\right) - \left(a_{n-1} - \frac{1}{2}\right).$$

令 $a_n - \frac{1}{2} = p_n$，则由 $a_0 = 1$，$a_1 = 4$ 知 $p_0 = \frac{1}{2}$，$p_1 = \frac{7}{2}$.

上式可化为 $p_{n+1} - 14p_n + p_{n-1} = 0$. 其特征方程为 $x^2 - 14x + 1 = 0$. 解之，得 $x_1 = 7 + 4\sqrt{3}$，$x_2 = 7 - 4\sqrt{3}$.

故 $p_n = r_1(7 + 4\sqrt{3})^n + r_2(7 - 4\sqrt{3})^n$. 将 p_0，p_1 的值代入，得 $r_1 = r_2 = \frac{1}{4}$.

于是
$$p_n = \frac{1}{4}(7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{1}{4}(7 - 4\sqrt{3})^n,$$

即
$$a_n - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}(7 + 4\sqrt{3})^n + \frac{1}{4}(7 - 4\sqrt{3})^n.$$

以下证明同证法 1.

说明 题给递推关系式可化为 $\begin{cases} a_{n+1} - \frac{1}{2} = 7(a_n - \frac{1}{2}) + 6b_n, \\ b_{n+1} = 8(a_n - \frac{1}{2}) + 7b_n, \end{cases}$ 因此，更一般地，我们可讨论如下问题：若已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的首项分别为 a_0，b_0，且满足条件：



$$\begin{cases} a_{n+1} = xa_n + yb_n & (1) \\ b_{n+1} = za_n + wb_n & (2) \end{cases}$$

求$\{a_n\}$和$\{b_n\}$的通项公式.

为解决此问题,我们首先证明下述引理:

引理　设数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1} = ma_n + bq^{n-1}$,$(m \neq 0, 1, q \neq 0, n \in \mathbf{N})$,则数列$\{a_n\}$的通项公式为

$$a_n = \begin{cases} \left(a_0 - \dfrac{b}{q-m}\right)m^{n-1} + \dfrac{b}{q-m}q^{n-1}, & m \neq q, \\ [a_0 + (n-1)b]q^{n-1}, & m = q. \end{cases}$$

证明　(1) 当$m \neq q$时,有$a_{n+1} - \dfrac{b}{q-m}q^n = m\left(a_n - \dfrac{b}{q-m}q^{n-1}\right)$,

则　$a_n - \dfrac{b}{q-m}q^{n-1} = \left(a_0 - \dfrac{b}{q-m}\right)m^{n-1}$,即,$a_n = \left(a_0 - \dfrac{b}{q-m}\right)m^{n-1} + \dfrac{b}{q-m}q^{n-1}$.

(2) 当$m = q$时,有$\dfrac{a_{n+1}}{q^n} = \dfrac{a_n}{q^{n-1}} + b$,则$\left\{\dfrac{a_n}{q^{n-1}}\right\}$成等差数列,故$\dfrac{a_n}{q^{n-1}} = a_0 + (n-1)b$,即,$a_n = [a_0 + (n-1)b]q^{n-1}$.

解　当$yz \neq 0$时,由题设可知

$$a_{n+1} + tb_{n+1} = (x+tz)a_n + (y+wt)b_n = (x+tz)\left(a_n + \frac{y+wt}{x+tz}b_n\right).$$

设$\dfrac{y+wt}{x+tz} = t$,则$zt^2 + (x-w)t - y = 0$

(1) 若此方程有不等的根t_1,t_2,则$a_{n+1} + tb_{n+1} = (x+tz)(a_n + tb_n)$,

累次迭代可得

$$a_n + tb_n = (x+tz)^{n-1}(a_0 + tb_0), \tag{3}$$

即$a_n + t_1b_n = (x+t_1z)^{n-1}(a_0 + t_1b_0)$,$a_n + t_2b_n = (x+t_2z)^{n-1}(a_0 + t_2b_0)$,

由上两式可解得

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{(x+t_2z)^{n-1}(a_0t_2 + t_2^2b_0) - (x_0+t_1z)^{n-1}(a_0t_1 + t_1^2b_0)}{t_2 - t_1}, \\ b_n = \dfrac{(x+t_2z)^{n-1}(a_0 + t_2b_0) - (x+t_1z)^{n-1}(a_0 + t_1b_0)}{t_2 - t_1}. \end{cases}$$

(2) 若方程有等根,则由$yz \neq 0$,可知$t \neq 0$,由(3)式得$tb_n = (x+tz)^{n-1}(a_0 + tb_0) - a_n$,代入(1)式整理得

$$a_{n+1} = xa_n + \frac{y}{t}[(x+tz)^{n-1}(a_0 + tb_0) - a_n] = \left(x - \frac{y}{t}\right)a_n + \frac{y}{t}(x+tz)^{n-1}(a_0 + tb_0).$$



由引理可求得相应的通项公式. 当 $yx=0$ 时,由引理易求出其通项公式,此处略.

例8 把正整数按上小下大、左小右大的原则排成三角形数表(每行比上一行多一个数),如图4-2所示,设 a_{ij} ($i,j\in\mathbf{N}^*$) 是位于这个三角形数表中从上往下数第 i 行,从左往右数第 j 个数,如 $a_{42}=8$. 若 $a_{ij}=2007$,求 i,j 的值.



图 4-2

解 因为 $a_{ij}=(1+2+3+\cdots+i-1)+j=\dfrac{i(i-1)}{2}+j=2007$

又因为 $i\in\mathbf{N}^*$,$\dfrac{i(i-1)}{2}<2007\leqslant\dfrac{i(i+1)}{2}$,所以 $i=63$.

又 $j=2007-\dfrac{i(i-1)}{2}=2007-\dfrac{63\times62}{2}=54$,所以 $i=63$,$j=54$.

例9 给定正整数 $n(n\geqslant2)$,按下述方式构成倒立的三角形数表:第一行依次写上数 $1,2,\cdots,n$,在上一行的每相邻两个数的正中间写上这两个数之和,得到下一行(比上一行少一个数),以此类推,最后一行(第 n 行)只有一个数. 例如,$n=5$ 时的数表如图4-3所示.

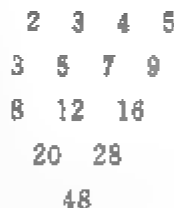


图 4-3

(1) 求第 n 行的数;

(2) 当 $n=2004$ 时,这张数表中共有多少个数是2004的倍数?请说明理由.

解 (1) 因为 $1,2,\cdots,n$ 是一个等差数列,所以这张数表的每一行数都依次构成等差数列. 设某一行 $a_1,a_2,\cdots,a_{m+1}$ 成等差数列,公差为 d,则其下一行为 $a_1+a_2,a_2+a_3,\cdots,a_m+a_{m+1}$ 也成等差数列,公差为 $2d$. 故题设数表的各行均成等差数列,公差依次为 $1,2,4,\cdots,2^{n-1}$.

设该数表第 i 行第 j 个数为 $f(i,j)$,则所求的数为 $f(n,1)$,易知

$$\begin{aligned}
f(n,1)&=f(n-1,1)+f(n-1,2)\\
&=f(n-1,1)+[f(n-1,1)+2^{n-2}]\\
&=2f(n-1,1)+2^{n-2}\\
&=2[f(n-2,1)+f(n-2,2)]+2^{n-2}\\
&=2f(n-2,1)+2[f(n-2,1)+2^{n-3}]+2^{n-2}\\
&=2^2f(n-2,1)+2\cdot2^{n-2}\\
&=\cdots\\
&=2^{n-1}f(1,1)+(n-1)\cdot2^{n-2}\\
&=2^{n-1}+(n-1)\cdot2^{n-2}\\
&=(n+1)\cdot2^{n-2}.
\end{aligned}$$

(2) 考察数表中任一行的相邻三个数：

$$A-D \quad A \quad A+D$$
$$2A-D \quad 2A+D$$
$$4A$$

可见，从第三行起每个数均等于其正上方那个数的4倍.

所以，数表中的从第三行起任一数被2004整除的充要条件是它的正上方数能被501整除.

而第一行中501的倍数有501、1002、1503、2004，它们的正下方数分别有500个，1001个，501个，0个. 而第二行中501的倍数有501、1503、2505、3507，它们的正下方数分别有249个、750个、751个、250个. 因此，表中2004的倍数的个数共有

$$500+1001+501+1+249+750+751+250=4003.$$

例 10 （2007年全国高中数学联合竞赛加试试题）设集合 $p=\{1,2,3,4,5\}$，对任意 $k\in P$ 和正整数 m，记 $f(m,k)=\sum\limits_{i=1}^{5}\left[m\sqrt{\frac{k+1}{i+1}}\right]$，其中 $[a]$ 表示不大于 a 的最大整数. 求证：对任意正整数 n，存在 $k\in P$ 和正整数 m，使得 $f(m,k)=n$.

证明 定义集合 $A=\{m\sqrt{k+1}\mid m\in\mathbf{N}^{*},k\in P\}$，其中 $\mathbf{N}^{*}$ 为正整数集. 由于对任意 $k,i\in P$ 且 $k\neq i$，$\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$ 是无理数，则对任意的 $k_1,k_2\in P$ 和正整数 m_1,m_2，$m_1\sqrt{k_1+1}=m_2\sqrt{k_2+1}$ 当且仅当 $m_1=m_2$，$k_1=k_2$ 时成立. 由于 A 是一个无穷集，现将 A 中的元素按从小到大的顺序排成一个无穷数列. 对于任意的正整数 n，设此数列中第 n 项为 $m\sqrt{k+1}$. 下面确定 n 与 m，k 的关系. 若 $m_i\sqrt{i+1}\leqslant m\sqrt{k+1}$，则 $m_i\leqslant m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}$. 由 m_i 是正整数可知，对 $i=1,2,3,4,5$，满足这个条件的 m_i 的个数为 $\left[m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]$. 从而 $n=\sum\limits_{i=1}^{5}\left[m\frac{\sqrt{k+1}}{\sqrt{i+1}}\right]=f(m,k)$. 因此对任意 $n\in\mathbf{N}^{*}$，存在 $m\in\mathbf{N}^{*}$，$k\in P$，使得 $f(m,k)=n$.

例 11 对任意正整数对 (k,h)，定义函数 $f(k,h)$ 如下：

(1) $f(1,1)=1$；

(2) $f(i+1,j)=f(i,j)+2(i+j)$，$f(i,j+1)=f(i,j)+2(i+j-1)$.

若 $f(k,h)=2007$，求所有的正整数对 (k,h).

解 由(1)、(2)递推得

$$f(2,1)=f(1,1)+2(1+1)=1+2\cdot 2,$$



$$f(3,1)=f(2,1)+2(2+1)=1+2\cdot2+2\cdot3,$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}f(k,1)&=f(k-1,1)+2[(k-1)+1]=f(k-1,1)+2k\\&=f(k-2,1)+2(k-1)+2k\\&=\cdots\\&=1+2\cdot2+2\cdot3+\cdots+2k\\&=1+(k-1)(k+2)\end{aligned}\tag{1}$$

其中，k 为正整数. 应用数学归纳法易证(1)式的正确性. 同样，应用递推和数学归纳法易得

$$f(k,2)=f(k,1)+2(k+1-1)=f(k,1)+2k$$

$$f(k,3)=f(k,2)+2(k+2-1)=f(k,1)+2k+2(k+1)$$

$$\cdots$$

$$\begin{aligned}f(k,h)&=f(k,h-1)+2(k+h-1-1)\\&=f(k,h-1)+2(k+h-2)\\&=f(k,h-2)+2(k+h-3)+2(k+h-2)\\&=\cdots\\&=f(k,1)+2k+2(k+1)+\cdots+2(k+h-2)\\&=f(k,1)+(2k+h-2)(h-1).\end{aligned}\tag{2}$$

把(1)式代入(2)式得

$$\begin{aligned}f(k,h)&=1+(k-1)(k+2)+(2k+h-2)(h-1)\\&=(k+h-1)^2-(h-k).\end{aligned}$$

其中 k，h 皆为正整数. 我们的问题转化为求解不定方程

$$(k+h-1)^2-(h-k)=2007\tag{3}$$

的正整数解. 注意到

$$|h-k|<\max(h,k)\leqslant k+h-1\tag{4}$$

且$[\sqrt{2007}]=44$，故有 $2007=44^2+71$ 或 $2007=45^2-18$.

据(4)式，显然后者满足条件. 故令$\begin{cases}k+h-1=45,\\h-k=18.\end{cases}$

解之得，$k=14$，$h=32$. 从而知所求的正整数对为(14，32).

据(4)式不难看出，所求的正整数对(14，32)是惟一的.

说明 有理数集是可数集. 上面的证明方法是将全体有理数依据一定的程序同正整数集建立一一对应. 按照这种程序，我们对全体奇正整数依表 4-1 编序，这样建立了正整数集同正奇数集之间的对应，且是一一对应. 2007 为奇数，依据表 4-1，它当然位于确定的行和确



定的列.

表 4-1

	1	2	3	4	5	6	7	…
1	1	3	7	13	21	31	43	
2	5	9	15	23	33	45		
3	11	17	25	35	47			
4	19	27	37	49				
5	29	39	51					
6	41	53						
7	55							
⋮								

例 12 (2006 年国家集训队考试试题)设两正数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ 满足

(1) $a_0=1\geqslant a_1$, $a_n(b_{n-1}+b_{n+1})=a_{n-1}b_{n-1}+a_{n+1}b_{n+1}$, $n\geqslant 1$;

(2) $\sum\limits_{i=0}^{n}b_i\leqslant n^{\frac{3}{2}}$, $n\geqslant 1$.

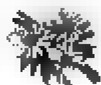
求 $\{a_n\}$ 的通项.

解 由问(1),有
$$a_n-a_{n+1}=\frac{b_{n-1}}{b_{n+1}}(a_{n-1}-a_n),$$
故
$$a_n-a_{n+1}=\frac{b_0b_1}{b_nb_{n+1}}(a_0-a_1),\tag{1}$$
若 $a_1=a_0=1$, 则 $a_n=1$. 下证 $a_1<a_0=1$. 由(1)式可得
$$a_0>a_0-a_n=b_0b_1(a_0-a_1)\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{b_kb_{k+1}}$$
推出
$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{b_kb_{k+1}}<\frac{a_0}{b_0b_1(a_0-a_1)}.\tag{2}$$
令 $x_n=\sqrt{b_nb_{n+1}}$, 则
$$x_1+x_2+\cdots+x_n\leqslant\frac{b_1+b_2}{2}+\frac{b_2+b_3}{2}+\cdots+\frac{b_n+b_{n+1}}{2}$$
$$<b_1+b_2+\cdots+b_{n+1}\leqslant(n+1)^{\frac{3}{2}}\leqslant 4n^{\frac{3}{2}}.$$
对任意正整数 k,



$$\frac{k}{\frac{1}{x_{k+1}^2}+\frac{1}{x_{k+2}^2}+\cdots+\frac{1}{x_{2k}^2}} \leqslant \sqrt[k]{x_{k+1}^2\cdots x_{2k}^2} \leqslant \left(\frac{x_{k+1}+\cdots+x_{2k}}{k}\right)^2 < \frac{[4(2k)^{\frac{1}{2}}]^2}{k^2}.$$

据此可推出$\frac{1}{x_{k+1}^2}+\frac{1}{x_{k+2}^2}+\cdots+\frac{1}{x_{2k}^2} \geqslant \frac{1}{2^7}$，故$\sum_{k=0}^{2^n}\frac{1}{b_k b_{k+1}} \geqslant \frac{1}{2^7}$，与(2)式矛盾，这表明$a_n=1$，$n \geqslant 0$



能力训练

1. 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项和分别为A_n，B_n，记$c_n=a_n \cdot B_n+b_n \cdot A_n-a_n \cdot b_n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，则数列$\{c_n\}$的前n项和为 ( )

A. A_n+B_n　　B. $\frac{A_n+B_n}{2}$　　C. $A_n \cdot B_n$　　D. $\sqrt{A_n \cdot B_n}$

2.（第15届"希望杯"高一竞赛题）等差数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的前n项的和分别是S_n，T_n，且$\frac{S_n}{T_n}=\frac{3n-3}{2n+3}$，则$\frac{a_5}{b_5}=$ ( )

A. $\frac{3}{2}$　　B. 1　　C. $\frac{6}{5}$　　D. $\frac{27}{23}$

3. 若$a_0=b_0=1$，$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$，$b_n=a_{n-1}+b_{n-1}(n=1,2,\cdots)$，则$a_{2007}^2-2b_{2007}^2$的值为 ( )

A. 1　　B. 2007　　C. 2　　D. 2008

4. 函数f定义在正整数有序对的集合上，并满足$f(x,x)=x$，$f(x,y)=f(y,x)$，$(x+y)f(x,y)=yf(x,x+y)$，则$f(14,52)$的值为 ( )

A. 364　　B. 182　　C. 91　　D. 无法计算

5. 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}(n \geqslant 1)$满足$a_{n+1}=2b_n-a_n$，$b_{n+1}=2a_n-b_n(n=1,2,\cdots)$。若$a_1=2007$，$a_n>0(n=2,3,\cdots)$，则$b_1$等于______。

6. 已知$a_n=3 \cdot 2^n$，把数列$\{a_n\}$的各项排成三角形，如图4-4所示，记$f(i,j)$表示第i行中第j个数，如$f(4,3)=a_{12}=3 \cdot 2^{12}$。则$f(10,8)=$______。

$$\begin{array}{ccccccc} & & & a_1 & & & \\ & & a_2 & a_3 & a_4 & & \\ & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 & a_9 & \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & a_{16} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{array}$$

图4-4



7. 在数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$中，$a_1=1$，$b_1=2$，且$\begin{cases}a_{n+1}=3a_n-2b_n,\\ b_{n+1}=2a_n-b_n,\end{cases}$$(n\in \mathbf{N}^*)$，则它们的前$n$项和分别为$A_n=$______；$B_n=$______.

8. (1993年全国高中数学联合竞赛试题)设各项为正数的数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$满足：a_n，b_n，a_{n+1}成等差数列，b_n，a_{n+1}，b_{n+1}成等比数列，且$a_1=1$，$b_1=2$，$a_2=3$，求通项$a_n=$______，$b_n=$______.

9. $\{x_n\}$和$\{y_n\}$两个整数数列定义如下：

$x_0=1$，$x_1=1$，$x_{n+2}=x_{n+1}+2x_n$，$n=0,1,2,\cdots$；

$y_0=1$，$y_1=-1$，$y_{n+2}=2y_{n+1}+3y_n$，$n=0,1,2,\cdots$.

证明：除"1"外，这两个数列没有其他相同的项.

10. 容器A中有12%的盐水300克，容器B中有6%的盐水300克，现约定完成下列程序为一次操作，从A，B容器中各取100克溶液，然后倒入对方容器中.(1)经过n次操作后，A，B容器内的浓度分别为$a_n\%$，$b_n\%$，求证：a_n+b_n为定值.(2)操作多少次后，两容器浓度相差不超过$\frac{1}{15}\%$($\lg 3=0.4771$).

11. (2003年第6届中国香港数学奥林匹克试题)设六边形$ABCDEF$是边长为1的正六边形，O是六边形的中心，除了六边形的每一条边，我们还从点O到每个顶点连一条线段，共得到12条长度为1的线段.一条路径是指从点O出发，沿着线段最后又回到点O，问长度为2003的路径共有多少条？

12. 已知数列$\{x_n\}$，$\{y_n\}$中，$x_1=3$，$y_1=1$，且$x_{n+1}=\frac{9}{10}x_n-\frac{1}{5}y_n$，$y_{n+1}=-\frac{1}{5}x_n+\frac{3}{5}y_n$.试问：是否存在实数$t$，能使$\{x_n+ty_n\}$成为等比数列？如果存在，求出$t$的值；如果不存在，请说明理由.

13. (1990年全俄数学奥林匹克竞赛题)三元数组(x_n, y_n, z_n)，$n\in \mathbf{N}^*$由下列关系式确定

$$x_1=2,\ y_1=4,\ z_1=\frac{6}{7},\ x_{n+1}=\frac{2x_n}{x_n^2-1},\ y_{n+1}=\frac{2y_n}{y_n^2-1},\ z_{n+1}=\frac{2z_n}{z_n^2-1}$$

(1) 求证：上述作三元数组的过程可以无限继续下去；

(2) 能否在某一步，得到三元数组(x_n, y_n, z_n)满足等式$x_n+y_n+z_n=0$？

14. (2004年天津市数学竞赛题)用1,2,3,4,5组成可以重复的所有n位数中，相邻的两个数字之差的绝对值不超过1.问具有这种性质的数有多少个？

15. 已知点列$A_n(a_n, b_n)(n\in \mathbf{N})$满足$A_1(0,1)$，且$a_{n+1}=1+\frac{a_n}{a_n^2+b_n^2}$，$b_{n+1}=\frac{b_n}{a_n^2+b_n^2}$.



(1) 求经过点 A_1，A_2，A_3 三点的圆 C 的圆心及半径.

(2) 试判断 $A_n(n\geqslant 4, n\in \mathbf{N}^*)$ 与圆 C 的位置关系，并证明.

16. 已知：$a_1=1$，$a_2=\frac{5}{2}$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，$b_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ 求 a_n

17 (2002年湖南省高中数学竞赛试题) 一台计算机装置的示意图如图4-5所示，其中 J_1，J_2 表示数据入口，C 是计算结果的出口. 计算过程是由 J_1，J_2 分别输入自然数 m 和 n，经过计算后得自然数 k 由 C 输出. 若此装置满足以下3个性质：① J_1，J_2 分别输入1，则输出结果1；② 若 J_1 输入任何固定自然数不变，J_2 输入自然数增大1，则输出结果比原来增大2；③ 若 J_2 输入1，J_1 输入自然数增大1，则输出结果为原来的2倍，试问：



图4-5

(1) 若 J_1 输入1，J_2 输入自然数 n，则输出结果为多少?

(2) 若 J_2 输入1，J_1 输入自然数 m，则输出结果为多少?

(3) 若 J_1 输入自然数2002，J_2 输入自然数9，则输出结果为多少?

18. 如图4-6，在某市举办的机器人灭火比赛中，比赛规则要求机器人从顶点A开始，沿正八边形的边去搜寻位于顶点E处的火并将其熄灭. 如果机器人在任何一个不是E的顶点，那么它可以走到相邻顶点中的任一点，当它到E点时就停在那里并将火熄灭. 设 e_n 为机器人经过 n 段到达 E 点的不同路线的条数，求 e_n.

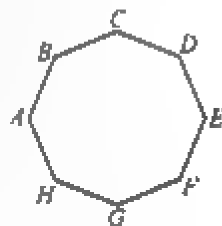


图4-6

19 (1994年IMO预选题) 对于任何正整数 x_0，三个序列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$，$\{z_n\}$ 定义如下：

(1) $y_0=4$ 和 $z_0=1$；

(2) 对 $n\geqslant 0$，如果 x_n 是偶数，$x_{n+1}=\frac{x_n}{2}$，$y_{n+1}=2y_n$ 和 $z_{n+1}=z_n$；

(3) 对 $n\geqslant 0$，如果 x_n 是奇数，$x_{n+1}=x_n+\frac{y_n}{2}-z_n$，$y_{n+1}=y_n+z_n$.

整数 x_0 称为一个好数，当且仅当对某个 $n\geqslant 1$，$x_n=0$. 求不大于1994的好数的个数.

第5讲　递推不等式

1　递推不等式的证明

知识扫描

类比递推数列的定义，我们给出递推不等式的定义：如果已知数列$\{a_n\}$的第1项（或第几项），且任一项a_n与它的前一项（或前几项）间的关系可以用一个不等式来表示，那么这个不等式就叫做这个数列的递推不等式.

特殊的递推不等式：$a_n>a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$说明数列$\{a_n\}$是递增数列；$a_n<a_{n-1}$ $(n=2,3,\cdots)$说明数列$\{a_n\}$是递减数列.

递推不等式通常出现在条件中，或出现在结论中，或出现在解题过程中. 证明递推不等式，常用归纳法、不等式性质、基本不等式等，并可以将递推数列求解的方法移植加以运用解决问题.

对递推不等式的考查，近年来已从竞赛题迁移到高考中.

在竞赛和高考中出现的递推不等式问题新颖多变，综合性强，时常被设置为压轴题，成为新的热点和亮点问题.

用数学归纳法直接证明与正整数n有关的递推不等式，归纳过程往往会有一定的困难，或者根本证不出来，此时要强化命题，或增加起点，或两次运用归纳假设，或利用$n=n_0$的结论，才能顺利地完成归纳过程.





例题分析

例 1 如果 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，试证明：当 $n\geqslant 2$ 时，有 $a_n^2\geqslant 2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)$.

证明 由 $a_{n-1}=a_n-\frac{1}{n}$，得 $a_n^2-a_{n-1}^2=\frac{2a_n}{n}-\frac{1}{n^2}$，所以

$$a_n^2=1+2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)-\left(\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)$$

$$>1+2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)-\left[\frac{1}{1\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]$$

$$=2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}>2\left(\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right).$$

说明 上面是通过构造递推关系来证的.本题也可运用数学归纳法证明加强命题：

$$a_n^2\geqslant 2\left(\frac{a_2}{2}+\frac{a_3}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n}\right)+\frac{1}{n}$$

例 2 （2007 天津市高考理科卷试题） 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=2$，$a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in \mathbf{N}^*)$，其中 $\lambda>0$.

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 S_n；

(3) 证明存在 $k\in \mathbf{N}^*$，使得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{a_{k+1}}{a_k}$ 对任意 $n\in \mathbf{N}^*$ 均成立.

分析 (1)根据已知的首项和递推关系式可以求出 a_2、a_3、a_4，由此联想 a_n 的通项公式，最后进行严格证明；或者直接构造一个新数列求其通项；

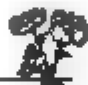
(2) 在第(1)问基础上，即结合 a_n 通项公式特征，寻求前 n 项和 S_n；

(3) 根据所证不等式的结构特征，可以看出 $k=1$ 就是满足条件的具体数值，然后只需结合 a_n 给出证明.

解法 1 (1) 根据已知条件可得 $a_2=\lambda^2+2^2$，$a_3=2\lambda^3+2^3$，$a_4=3\lambda^4+2^4$，据此猜想：$a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$，然后用数学归纳法证明(略)

解法 2 将 $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n$ 变形为 $\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n+1}-\frac{a_n}{\lambda^n}+\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n=1$.

(1)由 $a_{n+1}=\lambda a_n+\lambda^{n+1}+(2-\lambda)2^n(n\in \mathbf{N}^*)$，$\lambda>0$，得



$$\frac{a_{n+1}}{\lambda^{n+1}}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^{n+1}=\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n+1,$$

所以$\left\{\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n\right\}$是公差为1,首项为0的等差数列,故$\frac{a_n}{\lambda^n}-\left(\frac{2}{\lambda}\right)^n=n-1$,

所以数列$\{a_n\}$的通项公式为$a_n=(n-1)\lambda^n+2^n$.

(2) 设 $$T_n=\lambda^2+2\lambda^3+3\lambda^4+\cdots+(n-2)\lambda^{n-1}+(n-1)\lambda^n, \quad (1)$$

$$\lambda T_n=\lambda^3+2\lambda^4+3\lambda^5+\cdots+(n-2)\lambda^n+(n-1)\lambda^{n+1}, \quad (2)$$

当$\lambda\neq 1$时,(1)式$-$(2)式,得

$$(1-\lambda)T_n=\lambda^2+\lambda^3+\cdots+\lambda^n-(n-1)\lambda^{n+1}$$

$$=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{1-\lambda}-(n-1)\lambda^{n+1},$$

即 $$T_n=\frac{\lambda^2-\lambda^{n+1}}{(1-\lambda)^2}-\frac{(n-1)\lambda^{n+1}}{1-\lambda}=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2},$$

这时数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{(n-1)\lambda^{n+2}-n\lambda^{n+1}+\lambda^2}{(1-\lambda)^2}+2^{n+1}-2$.

当$\lambda=1$时,$T_n=\frac{n(n-1)}{2}$,这时数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{n(n-1)}{2}+2^{n+1}-2$.

(3) 猜想 $$\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{a_2}{a_1}=\frac{\lambda^2+4}{2},\ n\geqslant 2. \quad (3)$$

由$\lambda>0$,知$a_n>0$. 要使(3)式成立,只要$2a_{n+1}<(\lambda^2+4)a_n(n\geqslant 2)$.

因为 $$\begin{aligned}(\lambda^2+4)a_n&=(\lambda^2+4)(n-1)\lambda^n+(\lambda^2+4)2^n\\&>4\lambda(n-1)\lambda^n+4\times 2^n\\&=4(n-1)\lambda^{n+1}+2^{n+2}\\&\geqslant 2n\lambda^{n+1}+2^{n+2}\\&=2a_{n+1}\quad(n\geqslant 2).\end{aligned}$$

所以(3)式成立. 因此,存在$k=1$,使得$\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqslant\frac{a_{k+1}}{a_k}=\frac{a_2}{a_1}$对任意$n\in\mathbf{N}^*$均成立.

例3 设无穷数列$\{a_n\}$具有以下性质:(1) $a_0=1$;(2) 当$n\in\mathbf{N}^*$时,$a_n\leqslant a_{n-1}$.

请给出一个具有这种性质的无穷数列,使得不等式$\frac{a_0^2}{a_1}+\frac{a_1^2}{a_2}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}<2$对于任意$n\in\mathbf{N}^*$都成立,并对你给出的结果进行验证(或证明).

解 令$\frac{a_0^2}{a_1}=1$, $\frac{a_1^2}{a_2}=\frac{1}{2}$, $\cdots$, $\frac{a_{n-1}^2}{a_n}=\frac{1}{2^{n-1}}$,得$a_0=1$; $a_n=2^{n-1}a_{n-1}^2(n\geqslant 1)$. 此时,



$a_0=1,\ a_1=1,\ a_2=2,\ a_3=16,\ a_4=2048,\ \frac{a_n}{a_{n-1}}=2\left(\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\right)^2(n\geqslant 2)$，从“验证”的角度看，只要前一项满足$\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}>1$，后项就必定满足$\frac{a_n}{a_{n-1}}>1$. 本题也可求出$\frac{a_n}{a_{n-1}}=2^{2^{n-1}-1}$.

说明 本题的实质在于根据题意构造一个无穷数列，使其各项之和小于2. 只要联想到熟悉的等比数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，解决此题并不困难，关键是能不能透过现象看本质，抓住问题核心.

例4 设数列$a_0,a_1,\cdots,a_n,\cdots$，满足$a_0=\frac{1}{2}$及$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n}a_k^2(k=0,1,2,\cdots)$，其中$n$是一个给定的正整数. 试证：$1-\frac{1}{n}<a_n<1$.

证明
$$a_1=a_0+\frac{1}{n}a_0^2=\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{2n+1}{4n},$$

所以
$$a_1=\frac{2n+1}{4n}=\frac{(2n+1)^2}{4n(2n+1)}>\frac{4n^2+4n}{4n(2n+1)}=\frac{n+1}{2n+1}$$

又
$$\frac{2n+1}{4n}=\frac{4n^2-1}{4n(2n-1)}<\frac{4n^2}{4n(2n-1)}=\frac{n}{2n-1}$$

故
$$\frac{n+1}{2n+1}<a_1<\frac{n}{2n-1}.$$

下面用数学归纳法证明强化命题：

对$1\leqslant m\leqslant n$，有
$$\frac{n+1}{2n+2-m}<a_m<\frac{n}{2n-m}. \tag{1}$$

① $m=1$时，命题(1)显然成立.

② 假设$m=k(k<n)$时命题成立，则
$$a_{k+1}=a_k\left(1+\frac{1}{n}a_k\right)<\frac{n}{2n-k}\left(1+\frac{1}{2n-k}\right)=\frac{n(2n-k+1)}{(2n-k)^2}<\frac{n}{2n-(k+1)},$$
$$a_{k+1}>\frac{n+1}{2n+2-k}\left(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{n+1}{2n+2-k}\right)$$
$$>\frac{n+1}{2n+2-k}\left(1+\frac{1}{2n+1-k}\right)$$
$$=\frac{n+1}{2n+2-(k+1)}\left(\text{因为 } n>k \text{ 时 } \frac{n+1}{2n+2-k}>\frac{n}{2n+1-k}\right).$$

所以，$m=k+1$时，有$\frac{n+1}{2n+2-(k+1)}<a_{k+1}<\frac{n}{2n-(k+1)}$.



故(1)式对 $1\leqslant m\leqslant n$ 均成立.取 $m=n$ 可得 $1-\frac{1}{n}<\frac{n+1}{n+2}<a_n<1$,命题得证.

说明 有些命题,特别是用数学归纳法证明的命题,在由 k 到 $k+1$ 的过程中,变形有困难,如果把命题结论加强以后,即在归纳假设过程中也随之加强,更易于证明.

但这里加强的不等式(1)并不容易想到.下面给出一种直接证法:

依题意 $0<a_k<a_{k+1}(k=0,1,2,\cdots)$,所以 $a_{k+1}<a_k+\frac{1}{n}a_ka_{k+1}$ 两边同时除以 a_ka_{k+1},有 $\frac{1}{a_k}-\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{1}{n}$,即 $\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}>-\frac{1}{n}$.分别取 $k=0,1,\cdots,n-1$,并相加得:

$$\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}\right)>n\left(-\frac{1}{n}\right)=-1,$$

即 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_0}>-1$.所以 $\frac{1}{a_n}>1$ 即 $a_n<1$,且当 $1\leqslant k\leqslant n$ 时 $a_k<1$.

另一方面,$a_{k+1}<a_k+\frac{1}{n}a_k=\frac{1+n}{n}a_k$,所以 $a_k>\frac{n}{n+1}a_{k+1}$,故有

$$a_{k+1}>a_k+\frac{1}{n}\cdot a_k\cdot\frac{n}{n+1}\cdot a_{k+1}=a_k+\frac{1}{n+1}a_ka_{k+1},$$

两边除以 a_ka_{k+1} 有:$\frac{1}{a_k}>\frac{1}{a_{k+1}}+\frac{1}{n+1}$,即 $\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}<-\frac{1}{n+1}$.

令 $k=0,1,\cdots,n-1$,并相加得

$$\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}\right)+\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_0}\right)<-\frac{n}{n+1},$$

即
$$\frac{1}{a_n}<2-\frac{n}{n+1}=\frac{n+2}{n+1},$$

所以
$$a_n>\frac{n+1}{n+2}=1-\frac{1}{n+2}>1-\frac{1}{n}.$$

综上所述
$$1-\frac{1}{n}<a_n<1.$$

例5 数列 $\{x_n\}$ 中,已知 $x_1=4$,$x_n=\sqrt{2x_{n-1}+3}(n\geqslant 2)$,求证:

(1) $|x_n-3|\leqslant\frac{2}{3}|x_{n-1}-3|$;

(2) $3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant 3+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

证明 (1) 因为 $x_n=\sqrt{2x_{n-1}+3}$,所以



$$|x_n-3|=\left|\sqrt{2x_{n-1}+3}-3\right|=\frac{\left|(\sqrt{2x_{n-1}+3}-3)(\sqrt{2x_{n-1}+3}+3)\right|}{\sqrt{2x_{n-1}+3}+3}$$

$$=\frac{2|x_{n-1}-3|}{\sqrt{2x_{n-1}+3}+3}\leqslant\frac{2}{3}|x_{n-1}-3|.$$

(2) 由(1)问 $|x_n-3|\leqslant\frac{2}{3}|x_{n-1}-3|\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^2|x_{n-2}-3|$

$$\leqslant\cdots$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|x_1-3|=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}|4-3|=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

所以 $$3-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant 3+\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

例 6 （第 3 届中国东南地区数学奥林匹克试题）对任意正整数 n，设 a_n 是方程 $x^3+\frac{x}{n}=1$ 的实数根，求证：

(1) $a_{n+1}>a_n$；

(2) $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2a_i}<a_n$.

证明 由 $a_n^3+\frac{a_n}{n}=1$，得 $0<a_n<1$.

(1) $$0=a_{n+1}^3-a_n^3+\frac{a_{n+1}}{n+1}-\frac{a_n}{n}<a_{n+1}^3-a_n^3+\frac{a_{n+1}}{n}-\frac{a_n}{n}$$

$$=(a_{n+1}-a_n)\cdot\left(a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2+\frac{1}{n}\right).$$

因为 $a_{n+1}^2+a_{n+1}a_n+a_n^2+\frac{1}{n}>0$，故 $a_{n+1}-a_n>0$，即 $a_{n+1}>a_n$.

(2) 因为 $a_n\left(a_n^2+\frac{1}{n}\right)=1$，所以 $a_n=\frac{1}{a_n^2+\frac{1}{n}}>\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}$.

从而 $$\frac{1}{(n+1)^2a_n}<\frac{1}{n(n+1)}.$$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2a_i}<\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<a_n.$$

故 $$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(i+1)^2a_i}<a_n.$$



例 7 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_n=n^2\left[1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}\right](n\geqslant 2)$ 求证：

(1) $\frac{a_n+1}{a_{n+1}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}(n\geqslant 2)$；

(2) $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)<4(n\geqslant 1)$.

证明 (1)当 $n\geqslant 2$ 时，$\frac{a_n}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}$，所以

$$\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{a_n}{n^2}+\frac{1}{n^2}=\frac{a_n+1}{n^2}.$$

故

$$\frac{a_n+1}{a_{n+1}}=\frac{n^2}{(n+1)^2}(n\geqslant 2).$$

(2) 当 $n=1$ 时，$1+\frac{1}{a_1}=2<4$，结论成立；

当 $n\geqslant 2$ 时，

$$\begin{aligned}&\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\left(1+\frac{1}{a_3}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\\&=\frac{a_1+1}{a_1}\cdot\frac{a_2+1}{a_2}\cdot\frac{a_3+1}{a_3}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n+1}{a_n}\\&=\frac{a_1+1}{a_1a_2}\left(\frac{a_2+1}{a_3}\cdot\frac{a_3+1}{a_4}\cdot\cdots\cdot\frac{a_n+1}{a_{n+1}}\right)\cdot a_{n+1}\\&=\frac{1+1}{1\times 4}\left[\frac{2^2}{3^2}\cdot\frac{3^2}{4^2}\cdot\frac{4^2}{5^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2}{(n+1)^2}\right]\cdot a_{n+1}\\&=2\cdot\frac{a_{n+1}}{(n+1)^2}=2\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}\right)\\&<2\left[1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\right]\\&=2\left[1+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\right]\\&=2\left(2-\frac{1}{n}\right)<4\end{aligned}$$

综上所述，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，不等式都成立.

说明 第(1)问由数列的通项公式证明其一个递推关系，打破了这类问题的命题定势，值得重视. 第(2)问的证明应用了第(1)问的结论，但需要注意 $n\geqslant 2$ 这个条件.

例 8 已知：正项数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n，且满足 $S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$，

(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 求证：$T_n=\frac{1}{a_1^4}+\frac{1}{a_2^4}+\frac{1}{a_3^4}+\frac{1}{a_4^4}+\cdots+\frac{1}{a_n^4}<\frac{11}{10}$.

解 由(1)只要以$n+1$代入$S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$，得$S_{n+1}=\frac{a_{n+1}^2+a_{n+1}}{2}$，两式相减得$(a_{n+1}-a_n-1)(a_{n+1}+a_n)=0$，因为数列$\{a_n\}$是正项数列，$a_{n+1}+a_n\neq 0$，得$a_{n+1}-a_n=1$，注意到此时$n\geqslant 1$，数列$\{a_n\}$为等差数列，首项满足$a_1=\frac{a_1^2+a_1}{2}$，得$a_1=1$，所以$a_n=n$.

(2) **方法 1** 当$n\geqslant 4$时，$n^4\geqslant 4^2n(n-1)$，

$$T_n=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{4^2}\left[\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{n(n-1)}\right]$$

$$=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{16}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n}\right)<\frac{11}{10}.$$

方法 2 利用$\frac{1}{n^4}<\frac{1}{n^2(n-1)^2}=\frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$，得

$$T_n=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{7}\left(\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}\right)+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}\right)$$

$$+\frac{1}{11}\left(\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6^2}\right)+\cdots+\frac{1}{2n-1}\left[\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{7}\left[\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\frac{1}{4^2}-\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(n-1)^2}-\frac{1}{n^2}\right]$$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{63}<\frac{11}{10}.$$

方法 3 (分段估计，转化为等比数列求和)

注意到 $\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{7^4}<\frac{1}{4^4}\cdot 4=\frac{1}{4^3}$，

$\frac{1}{8^4}+\frac{1}{9^4}+\cdots+\frac{1}{15^4}<\frac{1}{8^4}\cdot 8=\frac{1}{8^3}$，

…

$$\frac{1}{(2^m)^4}+\frac{1}{(2^m)^4+1}+\cdots+\frac{1}{n^4}<\frac{1}{(2^m)^4}\cdot 2^m=\frac{1}{2^{3m}}.$$



就可得到：$T_n=\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^4}$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{8^3}+\frac{1}{16^3}+\cdots+\frac{1}{2^{3m}}\right)$$

$$<1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{\frac{1}{4^3}}{1-\frac{1}{2^3}}=1+\frac{1}{16}+\frac{1}{81}+\frac{1}{56}<\frac{11}{10}$$

例 9 已知数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=\frac{1}{2008}$，$a_n^2-2a_n+2a_{n-1}=0$，$(n=2,3,\cdots,m,m\in\mathbf{N},m>1)$. 求证：

(1) $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}(n=1,2,\cdots,m-1)$；

(2) $\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_m}<2008$.

证明 (1) 因为$a_n^2-2a_n+2a_{n-1}=0(n\geqslant2)$，所以$a_n^2-2a_n+1=1-2a_{n-1}$.

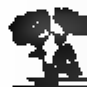
则$(a_n-1)^2=1-2a_{n-1}\geqslant0$，故 $a_{n-1}\leqslant\frac{1}{2}$.

又由 $a_n^2-2a_n+2a_{n-1}=0(n\geqslant2)$ 得 $a_n^2=2(a_n-a_{n-1})\geqslant0$，所以$a_n\geqslant a_{n-1}$，于是 $a_n\geqslant a_1>0(n=2,\cdots,m)$，即 $0<a_n\leqslant\frac{1}{2}(n=1,2,\cdots,m-1)$.

(2) 因为 $a_n^2-2a_n+2a_{n-1}=0(n\geqslant2)$，所以，$2a_{n-1}=a_n(2-a_n)$，则$\frac{1}{a_{n-1}}=\frac{2}{a_n(2-a_n)}=\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2-a_n}$，所以$\frac{1}{2-a_n}=\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}(n\geqslant2)$.

故
$$\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{2-a_2}+\cdots+\frac{1}{2-a_m}$$
$$=\frac{1}{2-a_1}+\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}\right)+\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{m-1}}-\frac{1}{a_m}\right)$$
$$=\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{m-1}}-\frac{1}{a_m}$$
$$=\frac{1}{2-a_1}+\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_m}.$$

已知$a_1=\frac{1}{2008}$，又 $a_m^2-2a_m+2a_{m-1}=0$，所以 $2(a_m+a_{m-1})=4a_m-a_m^2\leqslant4$，而当 $4a_m-a_m^2=4$ 时，此时，$a_{m-1}=0$，这与 $a_{m-1}\geqslant a_1\geqslant0$ 矛盾，所以 $2(a_m+a_{m-1})<4$，$a_1+a_m\leqslant a_{m-1}+a_m<2$.



而 $a_m = 1 \pm \sqrt{1-2a_{m-1}} > 0$，所以 $2-a_1 > a_m > 0$，$\frac{1}{2-a_1} - \frac{1}{a_m} < 0$，

于是 $\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \cdots + \frac{1}{2-a_m} = \frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_m} < \frac{1}{a_1} = 2008$，

即
$$\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \cdots + \frac{1}{2-a_m} < 2008.$$

说明 数列 $\{a_n\}$ 一定是有穷数列，不可能是无穷实数列. 容易发现，由于 $a_n > 0$ 时，$\frac{1}{2-a_n} > \frac{1}{2}(n = 1, 2, \cdots, m-1)$，所以 $\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \cdots + \frac{1}{2-a_m} > \frac{m}{2}$. 当 $\{a_n\}$ 是无穷数列时，$\frac{m}{2} \to +\infty$，与问(2)中 $\frac{1}{2-a_1} + \frac{1}{2-a_2} + \cdots + \frac{1}{2-a_m} < 2008$ 矛盾，这说明 $\{a_n\}$ 不可能是无穷数列. 若 $\{a_n\}$ 是无穷数列时，$\{a_n\}$ 一定是复数数列.

例 10 数列 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，求证：

$$\frac{a_2}{(a_1+a_2)^2} + \frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2} < \frac{1}{a_1}.$$

分析 将左边的和式的各项分母放缩为相邻两项之积，再通过裂项法求和.

证明 因为 $\{a_n\}$ 的各项均为正数，

所以
$$\begin{aligned}
&\frac{a_2}{(a_1+a_2)^2} + \frac{a_3}{(a_1+a_2+a_3)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_n)^2} \\
&< \frac{a_2}{a_1(a_1+a_2)} + \frac{a_3}{(a_1+a_2)(a_1+a_2+a_3)} + \cdots \\
&\quad + \frac{a_n}{(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})(a_1+a_2+\cdots+a_n)} \\
&= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_1+a_2} - \frac{1}{a_1+a_2+a_3}\right) + \cdots \\
&\quad + \left(\frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}} - \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n}\right) \\
&= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_1+a_2+\cdots+a_n} < \frac{1}{a_1}.
\end{aligned}$$

说明 和式递推不等式中，若数列的通项为分式型，可考虑对其分母进行放缩，若数列的通项中含有因式“$(-1)^n$”，可考虑结合相邻两项的和进行放缩. 另外，要熟悉一些常用的放缩方法，如 $\frac{1}{2n} \leqslant \frac{1}{n+k} \leqslant \frac{1}{n+1}$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$，$\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2} \leqslant \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$ 等.

例 11 已知：设 $x_1 = 1$，$x_2 = 1 + \frac{1}{1}$，$x_3 = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}$，…，

$$x_n = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1}}}}，\cdots$$

(1) 比较 x_1 与 x_2，x_1 与 x_3，x_2 与 x_4 的大小；

(2) 证明：$x_1 < x_3 < \cdots < x_{2k-1} < x_{2k+1} \cdots ; \cdots < x_{2k+2} < x_{2k} < \cdots < x_6 < x_4 < x_2$；

(3) 已知数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并且数列 $\{x_n\}$ 极限是方程 $x^2 - x - 1 = 0$ 的一个正根 a；设 $f(x) = x^2 - x - 1$，$a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n - \dfrac{f(a_n)}{f'(a_n)}(n = 1, 2, \cdots)$，求证：$a < a_n < a_{n-1} < \cdots < a_2 < a_1$。

解 (1)由计算得：$x_1 < x_2$，$x_1 < x_3$，$x_4 < x_2$。

(2) 比较 $x_{2k+1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_{2k-1}}}$ 与 $x_{2k-1} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{x_{2k-3}}}$ 的大小，只要比较 x_{2k-1} 与 x_{2k-3} 的大小，而这只要比较 x_1 与 x_3 的大小即可，由此可得

$$x_1 < x_3 < \cdots < x_{2k-1} < x_{2k+1} < \cdots；$$

同理，可以证明 $\cdots < x_{2k+2} < x_{2k} < \cdots < x_6 < x_4 < x_2$。

(3)$a_{n+1} = a_n - \dfrac{a_n^2 - a_n - 1}{2a_n - 1}$，利用部分分式法，得

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left[\left(a_n - \frac{1}{2}\right) + \frac{\frac{5}{4}}{a_n - \frac{1}{2}}\right] + \frac{1}{2}，$$

$$a_{n+1} > \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{\left(a_n - \frac{1}{2}\right) \cdot \frac{\frac{5}{4}}{a_n - \frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

又 $a_{n+1} - a_n = -\dfrac{a_n^2 - a_n - 1}{2a_n - 1} = -\dfrac{1}{2}\left[\left(a_n - \dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{\frac{5}{4}}{\left(a_n - \frac{1}{2}\right)}\right]$，

而函数 $y = -\dfrac{1}{2}\left(x - \dfrac{\frac{5}{4}}{x}\right)$ 是在 $x \in \left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$ 上的单调递减函数，故



$$a_{n+1}-a_n<\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{\frac{5}{4}}{\frac{\sqrt{5}}{2}}\right)=0.$$

说明 第(2)问也可采用数学归纳法证明. 出现两种不同的单调顺序的原因，是因为函数 $y=1+\frac{1}{x}$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上为减函数，函数 $y=1+\frac{1}{1+\frac{1}{x}}$ 即 $y=2-\frac{1}{x+1}$ 在 $\mathbf{R}^+$ 上为增函数.

例 12 在数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2^n}+1(n\in\mathbf{N}^*)$

(1) 试比较 a_na_{n+2} 与 a_{n+1}^2 的大小；

(2) 证明：当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n>3-\frac{n+1}{2^{n-1}}$.

解 (1) 由题设知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n>0$

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2^n}+1=\frac{n+2^n}{2^n}$，所以 $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=\frac{n+1+2^{n+1}}{2^{n+1}}$，

所以
$$\begin{aligned}a_na_{n+2}-a_{n+1}^2&=\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\cdot\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}-1\right)a_{n+1}^2\\&=\left(\frac{2^n}{n+2^n}\cdot\frac{n+1+2^{n+1}}{2^{n+1}}-1\right)a_{n+1}^2\\&=\left[\frac{n+1+2^{n+1}}{2(n+2^n)}-1\right]a_{n+1}^2\\&=\frac{1-n}{2(n+2^n)}a_{n+1}^2\leqslant 0,\end{aligned}$$

故
$$a_na_{n+2}\leqslant a_{n+1}^2.$$

(2) **证法 1** 由已知得，$a_1=1$，$a_2=\frac{3}{2}$，$a_3=\frac{9}{4}$.

因为 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n}{2^n}+1>1$，即，$a_{n+1}>a_n$，又因为 $a_1=1$，故 $a_n\geqslant 1(n\geqslant 2)$.

当 $n\geqslant 3$ 时，$a_n=\left(\frac{n-1}{2^{n-1}}+1\right)a_{n-1}=\frac{n-1}{2^{n-1}}a_{n-1}+a_{n-1}>\frac{n-1}{2^{n-1}}+a_{n-1}$，

所以 $a_n-a_{n-1}>\frac{n-1}{2^{n-1}}$.

所以 $a_n=a_3+(a_4-a_3)+(a_5-a_4)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$$>\frac{9}{4}+\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}}$$



设 $$S=\frac{3}{2^3}+\frac{4}{2^4}+\cdots+\frac{n-1}{2^{n-1}},\tag{1}$$

则 $$\frac{1}{2}S=\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+\cdots+\frac{n-1}{2^n}.\tag{2}$$

(1)式－(2)式，得

$$\frac{1}{2}S=\frac{3}{2^3}+\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{2^5}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)-\frac{n-1}{2^n}=\frac{3}{8}+\frac{\frac{1}{16}-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}-\frac{n-1}{2^n}$$

所以 $$S=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{n-1}{2^{n-1}}=1-\frac{n+1}{2^{n-1}}.$$

所以 $$a_n=\frac{9}{4}+1-\frac{n+1}{2^{n-1}}>2+1-\frac{n+1}{2^{n-1}}=3-\frac{n+1}{2^{n-1}}.$$

证法 2 由已知得，$a_1=1$，$a_2=\frac{3}{2}$，$a_3=\frac{9}{4}$.

(1) 当 $n=3$ 时，由 $3-\frac{n+1}{2^{n-1}}=2<\frac{9}{4}$，知不等式成立. 假设当 $n=k(k\geqslant 3)$ 时，不等式成立，即 $a_k>3-\frac{k+1}{2^{k-1}}$，那么

$$a_{k+1}=\left(\frac{k}{2^k}+1\right)a_k>\left(\frac{k}{2^k}+1\right)\left(3-\frac{k+1}{2^{k-1}}\right)=3-\frac{k(k+1)}{2^{2k-1}}+\frac{k-2}{2^{k-1}}.$$

(2) 要证 $a_{k+1}>3-\frac{(k+1)+1}{2^{(k+1)-1}}$，只需证 $-\frac{k(k+1)}{2^{2k-1}}+\frac{k-2}{2^{k-1}}>-\frac{k+2}{2^k}$，下略.

例 13 (2007 年四川省高考理科卷压轴题) 设函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ ($n\in\mathbf{N}$，且 $n>1$，$x\in\mathbf{R}$).

(1) 当 $x=6$ 时，求 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^x$ 的展开式中二项式系数最大的项；

(2) 对任意的实数 x，证明 $\frac{f(2x)+f(2)}{2}>f'(x)$ ($f'(x)$ 是 $f(x)$ 的导函数)；

(3) 是否存在 $a\in\mathbf{N}$，使得 $an<\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<(a+1)n$ 恒成立？若存在，试证明你的结论并求出 a 的值；若不存在，请说明理由.

解 (1)展开式中二项式系数最大的项是第 4 项，这项是 $C_6^3 1^3\left(\frac{1}{n}\right)^3=\frac{20}{n^3}$

(2) 方法 1 因 $f(2x)+f(2)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^2$



$$\geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{2}\right)$$

$$\geqslant 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)=2f'(x).$$

故$\dfrac{f(2x)+f(2)}{2}>f'(x)$恒成立.

方法 2 因 $f(2x)+f(2)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}+\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}$

$$\geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2x}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2}}=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

而 $2f'(x)=2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,故只需对 $1+\frac{1}{n}$ 和 $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$ 进行比较.

令 $g(x)=x-\ln x(x\geqslant 1)$,有 $g'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x}$,由 $\frac{x-1}{x}=0$,得 $x=1$.

因为当 $0<x<1$ 时,$g'(x)<0$,$g(x)$ 单调递减;当 $1<x<+\infty$ 时,$g'(x)>0$,$g(x)$ 单调递增,所以在 $x=1$ 处 $g(x)$ 有极小值 1.

故当 $x>1$ 时,$g(x)>g(1)=1$,从而有 $x-\ln x>1$,亦即 $x>\ln x+1>\ln x$,故有 $1+\frac{1}{n}>\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$恒成立.

所以 $f(2x)+f(2)\geqslant 2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\left(1+\frac{1}{n}\right)>2\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

即 $f(2x)+f(2)>2f'(x)$,原不等式成立.

(3) 对 $m\in\mathbf{N}$,且 $m>1$,有

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=C_m^0+C_m^1\left(\frac{1}{m}\right)+C_m^2\left(\frac{1}{m}\right)^{2}+\cdots+C_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^{k}+\cdots+C_m^m\left(\frac{1}{m}\right)^{m}$$

$$=1+1+\frac{m(m-1)}{2!}\left(\frac{1}{m}\right)^{2}+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}\left(\frac{1}{m}\right)^{k}$$

$$+\cdots+\frac{m(m-1)\cdots 2\cdot 1}{m!}\left(\frac{1}{m}\right)^{m}$$

$$=2+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{m}\right)+\cdots+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)$$

$$+\cdots+\frac{1}{m!}\left(1-\frac{1}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{m-1}{m}\right)$$



$$<2+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\cdots+\frac{1}{m!}$$

$$<2+\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{3\times2}+\cdots+\frac{1}{k(k-1)}+\cdots+\frac{1}{m(m-1)}$$

$$=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$

$$=3-\frac{1}{m}<3.$$

又因为 $C_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^k>0(k=2,3,4,\cdots,m)$，故 $2<\left(1+\frac{1}{m}\right)^m<3$. 因为 $2\leqslant\left(1+\frac{1}{1}\right)^1<3$，从而有 $2n<\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3n$ 成立，即存在 $a=2$，使得 $2n<\sum\limits_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k<3n$ 恒成立.

例 14 （2007 年浙江省高考理科卷第 21 题）已知数列 $\{a_n\}$ 中的相邻两项 a_{2k-1}，a_{2k} 是关于 x 的方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot2^k=0$ 的两个根，且 $a_{2k-1}\leqslant a_{2k}(k=1,2,3,\cdots)$.

(1) 求 a_1，a_3，a_5，a_7；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的前 $2n$ 项和 S_{2n}；

(3) 记 $f(n)=\frac{1}{2}\left(\frac{|\sin n|}{\sin n}+3\right)$，

$$T_n=\frac{(-1)^{f(2)}}{a_1a_2}+\frac{(-1)^{f(3)}}{a_3a_4}+\frac{(-1)^{f(4)}}{a_5a_6}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}},$$

求证：$\frac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant\frac{5}{24}(n\in\mathbf{N}^*)$.

解 (1) 方程 $x^2-(3k+2^k)x+3k\cdot2^k=0$ 的两个根为 $x_1=3k$，$x_2=2^k$. 当 $k=1$ 时，$x_1=3$，$x_2=2$，所以 $a_1=2$；当 $k=2$ 时，$x_1=6$，$x_2=4$，所以 $a_3=4$；当 $k=3$ 时，$x_1=9$，$x_2=8$，所以 $a_5=8$；当 $k=4$ 时，$x_1=12$，$x_2=16$，所以 $a_7=12$.

(2) $S_{2n}=a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=(3+6+\cdots+3n)+(2+2^2+\cdots+2^n)$

$$=\frac{3n^2+3n}{2}+2^{n+1}-2.$$

(3) $T_n=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$，

所以 $T_1=\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{6}$，$T_2=\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}=\frac{5}{24}$.

当 $n\geqslant3$ 时， $T_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$



$$\geqslant \frac{1}{6}+\frac{1}{a_3a_4}-\left(\frac{1}{a_5a_6}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$$

$$\geqslant \frac{1}{6}+\frac{1}{6\times 2^2}-\frac{1}{6}\left(\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{6\cdot 2^n}>\frac{1}{6},$$

同时

$$T_n=\frac{5}{24}+\frac{1}{a_5a_6}-\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{(-1)^{f(n+1)}}{a_{2n-1}a_{2n}}$$

$$\leqslant \frac{5}{24}-\frac{1}{a_5a_6}+\left(\frac{1}{a_7a_8}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$$

$$\leqslant \frac{5}{24}-\frac{1}{9\times 2^3}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{2^4}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)$$

$$=\frac{5}{24}-\frac{1}{9\cdot 2^n}<\frac{5}{24}.$$

综上，当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时，$\frac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant\frac{5}{24}$.

说明 如果按照常规先找 $f(n)$ 的规律再求和，思维将受阻. 在找不到规律的情况下，我们从最简单的情形开始分析，具体地计算 T_1，T_2 的值，从中发现规律完成题目的证明.

第(3)小题有如下别证：

当 $k\geqslant 4$ 时，由 $2^k=(1+1)^k\geqslant 2C_k^0+2C_k^1+C_k^2>3(k+1)$，得 $2^k>3k$，所以

$$\frac{1}{a_{2k-1}a_{2k}}=\frac{1}{3k\cdot 2^k}<\frac{1}{3k\cdot 3(k+1)}=\frac{1}{9}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right).$$

当 $k=2$ 时，$\frac{1}{a_3a_4}=\frac{1}{24}$；当 $k=3$ 时，$\frac{1}{a_5a_6}=\frac{1}{72}$；当 $k=4$ 时，$\frac{1}{a_7a_8}=\frac{1}{192}$；因此，

$$\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}-\frac{1}{a_7a_8}-\frac{1}{a_9a_{10}}-\cdots-\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}$$

$$>\frac{1}{24}-\frac{1}{72}-\frac{1}{192}-\frac{1}{9}\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$>\frac{1}{24}-\frac{1}{72}-\frac{1}{192}-\frac{1}{45}>\frac{1}{180}-\frac{1}{192}>0.$$

又因为 $f(n)=1$ 或 $f(n)=2$，得 $(-1)^{f(k)}=1$ 或 $(-1)^{f(k)}=-1$，

所以

$$T_n\geqslant\frac{1}{a_1a_2}+\left(\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}-\cdots-\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)\geqslant\frac{1}{a_1a_2}=\frac{1}{6}.$$

同时

$$-\frac{1}{a_5a_6}-\frac{1}{a_7a_8}-\frac{1}{a_9a_{10}}+\left(\frac{1}{a_{11}a_{12}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$$

$$<-\frac{1}{72}-\frac{1}{192}+\frac{1}{9}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+1}\right)<\frac{1}{216}-\frac{1}{192}<0$$



因此 $T_n\leqslant\frac{1}{a_1a_2}+\frac{1}{a_3a_4}-\frac{1}{a_5a_6}-\frac{1}{a_7a_8}\quad\frac{1}{a_9a_{10}}+\left(\frac{1}{a_{11}a_{12}}+\cdots+\frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}}\right)$

$$\leqslant\frac{1}{6}+\frac{1}{24}=\frac{5}{24}.$$

综上所述,当 $n\in\mathbf{N}^*$ 时,$\frac{1}{6}\leqslant T_n\leqslant\frac{5}{24}$.

例 15 (2005 年中国数学奥林匹克第 4 题)已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_1=\frac{21}{16}$,

$$2a_n-3a_{n-1}=\frac{3}{2^{n+1}},\ n\geqslant 2. \tag{1}$$

设 m 为正整数,$m\geqslant 2$. 证明:当 $n\leqslant m$ 时,有

$$\left(a_n+\frac{3}{2^{n+1}}\right)^{\frac{1}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m-n+1}. \tag{2}$$

证明 由(1)式得 $2^na_n=3\cdot 2^{n-1}a_{n-1}+\frac{3}{4}$,记 $b_n=2^na_n$,$n=1,2,\cdots$

$$b_n=3b_{n-1}+\frac{3}{4},\ b_n+\frac{3}{8}=3\left(b_{n-1}+\frac{3}{8}\right).$$

由于 $b_1=2a_1=\frac{21}{8}$,所以 $b_n+\frac{3}{8}=3^{n-1}\left(b_1+\frac{3}{8}\right)=3^n$,故得 $a_n=\left(\frac{3}{2}\right)^n-\frac{3}{2^{n+1}}$. 因此,为证明(2)式,只需证明 $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<\frac{m^2-1}{m-n+1}$,

即只需证 $$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<m-1. \tag{3}$$

首先估计 $1-\frac{n}{m+1}$ 的上界. 由贝努里不等式,有 $1-\frac{n}{m+1}<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^n$,

所以 $$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(1-\frac{1}{m+1}\right)^{nm}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{nm}=\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^m}\right]^n.$$

注:也可以根据平均不等式导出.

$$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m=\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{mn-m}<\left[\frac{m\left(1-\frac{n}{m+1}\right)+mn-m}{mn}\right]^{mn}=\left(\frac{m}{m+1}\right)^{mn}.$$

由于 $m\geqslant 2$,根据二项式定理,可得



$$\left(1+\frac{1}{m}\right)^m\geqslant 1+C_m^1\cdot\frac{1}{m}+C_m^2\cdot\frac{1}{m^2}=\frac{5}{2}-\frac{1}{2m}\geqslant\frac{9}{4}$$

所以$\left(1-\frac{n}{m+1}\right)^m<\left(\frac{4}{9}\right)^n$，即$1-\frac{n}{m+1}<\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}$，所以，欲证(3)式，只需证$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{2n}{m}}\times\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<m-1$，

即
$$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}\left[m-\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n(m-1)}{m}}\right]<m-1. \tag{4}$$

记$\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{n}{m}}=t$，则$0<t<1$，(4)式为$t(m-t^{m-1})<m-1$，

即
$$(t-1)[m-(t^{m-1}+t^{m-2}+\cdots+1)]<0.$$

此不等式显然成立，从而原不等式成立.

例 16 （2008 年中国数学奥林匹克竞赛题）给定整数$n\geqslant 3$证明：集合$X=\{1,2,3,\cdots,n^2-n\}$能写成两个不相交的非空子集的并，使得每一个子集均不包含n个元素$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，$a_1<a_2<a_3<\cdots<a_n$，满足$a_k\leqslant\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2}$，$k=2,\cdots,n-1$.

证明 定义$S_k=\{k^2-k+1,\cdots,k^2\}$，$T_k=\{k^2+1,\cdots,k^2+k\}$，$k=1,2,\cdots,n-1$.

令$S=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}S_k$，$T=\bigcup\limits_{k=1}^{n-1}T_k$. 下面证明$S$，$T$即为满足题目要求的两个子集. 首先，$S\cap T=\varnothing$，且$S\cup T=X$. 其次，如果$S$中存在$n$个元素$a_1,a_2,\cdots,a_n$，$a_1<a_2<\cdots<a_n$，满足

$$a_k\leqslant\frac{a_{k-1}+a_{k+1}}{2},\ k=2,\cdots,n-1$$

则
$$a_k-a_{k-1}\leqslant a_{k+1}-a_k,\ k=2,\cdots,n-1. \tag{1}$$

不妨设$a_1\in S_i$. 由于$|S_{n-1}|<n$，故$i<n-1$. $a_1,a_2,\cdots,a_n$这n个数中至少有$n-|S_i|=n-i$个在$S_{i+1}\cup\cdots\cup S_{n-1}$中. 根据抽屉原理，必有某个$S_j$ $(i<j<n)$中含有其中至少两个数. 设最小的一个为a_k，则$a_k,a_{k+1}\in S_j$，而$a_{k-1}\in S_1\cup\cdots\cup S_{j-1}$.

于是
$$a_{k+1}-a_k\leqslant|S_j|-1=j-1,\ a_k-a_{k-1}\geqslant|T_{j-1}|+1=j.$$

所以$a_{k+1}-a_k<a_k-a_{k-1}$，与(1)式矛盾. 故S中不存在n个元素满足题中假设. 同理，T中亦不存在这样的n个元素，这表明S，T即为满足题中要求的两个子集.

能力训练

1. 设$S_n=1+\frac{1}{1+\frac{1}{3}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}}+\cdots+\frac{1}{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{1}{k_n}}$，其中



$k_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\in \mathbf{N}^*)$，记 T_0 是满足不等式 $S_{2008}>T$ 的最大整数 T，则下列四个数中与 T_0 最接近的是 ( )

A. 2008　　B. 2007　　C. 1007　　D. 1005

2.（2008年浙江省高中数学竞赛试题）设非负等差数列 $\{a_n\}$ 的公差 $d\neq 0$，记 S_n 为数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和，证明：

(1) 若 $m,n,p\in \mathbf{N}^*$，且 $m+n=2p$，则 $\frac{1}{S_m}+\frac{1}{S_n}\geqslant \frac{2}{S_p}$；

(2) 若 $a_{503}\leqslant \frac{1}{1005}$，则 $\sum_{n=1}^{2007}\frac{1}{S_n}>2008$.

3.（2003年第2届女子数学奥林匹克试题）数列 $\{a_n\}$ 定义如下：$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n^2-a_n+1\ (n=1,2,3,\cdots)$．求证：$1-\frac{1}{2003^{2003}}<\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$.

4. 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{4}{a_n}\right)(n\in \mathbf{N}^*)$．证明：对于 $n\geqslant 2$，有 $a_n>2+4\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$.

5. 设 $\{a_n\}$ 为正项等差数列（$n\in \mathbf{N}^*$ 且 $n>1$）．求证：

$$\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant\left(1+\frac{a_1+a_n}{2a_1a_n}\right)^n.$$

6. 求证：$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{3n+1}$.

7.（2006年浙江省高考理科卷压轴题）已知函数 $f(x)=x^3+x^2$，数列 $\{x_n\}(x_n>0)$ 的第一项 $x_1=1$，以后各项按如下方式取定：曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线与经过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线平行（如图5-1）．求证：当 $n\in \mathbf{N}^*$ 时，

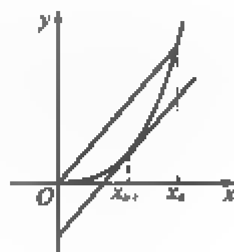


图5-1

(1) $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$；

(2) $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_0=\frac{1}{2}$，$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{n^2}a_{n-1}^2$，求证：$\frac{n+1}{n+2}<a_n<n$.

9.（2007年浙江省高中数学会考压轴题）数列 $\{x_n\}$ 满足

$$x_1=\frac{3}{2},\quad x_{n+1}=\begin{cases}3x_n & n\text{为奇数},\\ x_n+n, & n\text{为偶数}.\end{cases}$$



(1) 求 x_2，x_3，x_4；

(2) 记 $y_n=x_{2n-1}+n+\frac{1}{2}$，$n\in\mathbf{N}^*$，求证：数列$\{y_n\}$是等比数列；

(3) 记 $S_{2n}=x_1+x_2+\cdots+x_{2n-1}+x_{2n}$，是否存在数集 A，使 $a\in A$ 时，不等式 $\frac{S_{2(n+1)}+a}{3^{n+1}}>\frac{S_{2n}+a}{3^n}$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立？若存在，求出 A；若不存在，请说明理由.

10. (2008年高中数学联合竞赛(四川省初赛)试题)已知 $1<a_i<\sqrt{7}$，$i=1,2,\cdots,n$，其中正整数 $n\geqslant 2$.

(1) 求证：对于一切的正整数 i，都有 $\frac{1}{a_i^2-1}+\frac{1}{7-a_i^2}\geqslant\frac{2}{3}$；

(2) 求 $S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(a_i^2-1)(7-a_{i+1}^2)}}$ 的最小值，其中约定 $a_{n+1}=a_1$.

11. (2003年湖南省数学竞赛试题改编)设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 $\mathbf{R}$，当 $x<0$ 时，$f(x)>1$，且对任意实数 x，y，有 $f(x+y)=f(x)f(y)$ 成立，数列$\{a_n\}$满足 $a_1=f(0)$ 且 $f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}(n\in\mathbf{N}^*)$.

(1) 求 a_{2008} 的值；

(2) 若不等式 $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant k\sqrt{2n+1}$ 对一切 $n\in\mathbf{N}^*$ 均成立，求 k 的最大值.

12. 已知数列$\{a_n\}$满足 $a_1=1$，$a_{n+1}a_n-1=a_n^2$.

(1) 证明：$\sqrt{2n-1}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{3n-2}$；

(2) 求整数 m，使得 $|a_{2008}-m|$ 最小.

13. (伊朗第10届数学奥林匹克第2阶段试题)已知 $a_0=1$，$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n+\frac{a_{n-1}}{1+(a_{n-1})^2}$，$n\geqslant 1$，证明 $52<a_{1371}<65$.

14. (2004年全国高中数学联合竞赛第2试第2题)在平面直角坐标系 xOy 中，y 轴正半轴上的点列$\{A_n\}$与曲线 $y=\sqrt{2x}(x\geqslant 0)$ 上的点列$\{B_n\}$满足 $|OA_n|=|OB_n|=\frac{1}{n}$，直线 A_nB_n 在 x 轴上的截距为 a_n，点 B_n 的横坐标为 b_n，$n\in\mathbf{N}^*$. 证明：

(1) $a_n>a_{n+1}>4$，$n\in\mathbf{N}^*$；

(2) 存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $n>n_0$ 都有 $\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$.

15. 在 xOy 平面上有一系列点 $P_1(x_1,y_1)$，$P_2(x_2,y_2)$，$\cdots$，$P_n(x_n,y_n)$，$\cdots$，对每个正整数 n，点 P_n 位于函数 $y=x^2(x\geqslant 0)$ 的图像上. 以点 P_n 为圆心的 $\odot P_n$ 与 x 轴都相



切，且$\odot P_n$与$\odot P_{n+1}$又彼此外切．若$x_1=1$，且$x_{n+1}<x_n(n\in\mathbf{N}^*)$．

(1) 求证：数列$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$是等差数列；

(2) 设$\odot P_n$的面积为S_n，$T_n=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n}$，求证 $T_n<\frac{3\sqrt{\pi}}{2}$．

16. 设无穷数列$\{a_n\}$具有以下性质：① $a_1=1$；② 当$n\in\mathbf{N}^*$时，$a_n\leqslant a_{n+1}$

(1) 请给出一个具有这种性质的无穷数列，使得不等式$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\frac{a_3^2}{a_4}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}<\frac{3}{2}$对于任意的$n\in\mathbf{N}^*$都成立，并对你给出的结果进行验证(或证明)；

(2) 若$b_n=\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}$，其中$n\in\mathbf{N}^*$，且记数列$\{b_n\}$的前$n$项和$B_n$，证明：$0\leqslant B_n<2$．

17. (2007年浙江省高中数学竞赛A卷试题) 已知抛物线$y=-2x^2+x-\frac{1}{8}$和点$A\left(\frac{1}{4},\frac{11}{8}\right)$．过点$F\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right)$任作直线，交抛物线于$B$，$C$两点．

(1) 求$\triangle ABC$的重心的轨迹方程，并表示成$y=f(x)$形式；

(2) 若数列$\{x_k\}$，$0<x_1<\frac{1}{2}$，满足$x_{k+1}=f(x_k)$．试证：$\sum\limits_{k=1}^{n}x_{k+1}^{k}<\frac{3}{5}$．

18. (2007年全国高中数学联合竞赛(湖北省预赛)试题) 已知数列$\{a_n\}$满足$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2(n\geqslant1,n\in\mathbf{N})$．

(1) 若$a_1=4$，证明：

① 当$n\geqslant2$时，有$a_{n+1}\geqslant2a_n$；

② 当$n\geqslant1$时，有$a_{n+1}\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n a_n$．

(2) 若$a_1=1$，证明：当$n\geqslant5$时，有$\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}<n-1$．



2 递推不等式的解法

知识扫描

1. 定义

递推不等式含有未知数列，那么递推不等式的解就是某个数列或某类数列.

定义1 如果数列$\{a_n\}$满足所给的递推不等式，就称$\{a_n\}$为该递推不等式的解数列或一个解.

递推不等式的解中通常都含有作为参数出现的任意数列（下面简称参数列）.

定义2 可以表示为$a_1f(x)+a_2f(x+1)+a_3f(x+2)+\cdots+a_{k+1}f(x+k)\leqslant b$，其中$a_1,a_2,\cdots,a_{k+1}$及$b$为给定常数的不等式称为$k$阶线性函数不等式.

显然，$a_1f(n)+a_2f(n+1)+a_3f(n+2)+\cdots+a_{k+1}f(n+k)\leqslant b$是它$x=n$，$n\in N^*$的特殊情况.

2. 几个结论

下面会反复用到如下的结论：

(1) 设$a_1>0$，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$，则$a_i>0(2\leqslant i\leqslant n)\Leftrightarrow\{S_n\}$单调递增.

证明：$S_i=S_{i-1}+a_i>S_{i-1}\Leftrightarrow a_i>0$.

(2) 设$a_1>1$，$T_n=a_1a_2\cdots a_n$，则$a_i>1(2\leqslant i\leqslant n)\Leftrightarrow\{T_n\}$单调递增.

证明：在(1)中用$\lg T_i\Leftrightarrow S_i$，$\lg a_i\to a_i$，即可得证.

3. 递推不等式的解法

递推不等式$a_{n+1}\leqslant f(a_n)$，$n\in N^*$取等号时，可以得到相应的递推数列$a_{n+1}=f(a_n)$，$n\in N^*$. 因此，递推不等式可以看作递推数列的推广形式.

对递推不等式的研究，笔者已历时3年多，本单元中的结论几乎都是第一次公开发表. 至于更为一般的具有函数解的函数元不等式，有兴趣的读者请参阅近期将出版的笔者的专著《函数元不等式》.





例题分析

例 1 设 f 为定义在所有正整数上的正值函数，$f(1)=1$ 且

$$f(n+1)\geqslant\left(1+\frac{1}{n}\right)f(n)\ (n\geqslant 1). \tag{1}$$

试求 $f(n)$.

解 由递推不等式(1)得

$$\frac{f(n+1)}{n+1}\geqslant\frac{f(n)}{n}, \tag{2}$$

令 $g(n)=\frac{f(n)}{n}$，则不等式(2)就变成 $g(n+1)\geqslant g(n)$，故递推不等式(1)的解为

$$f(n)=ng(n),$$

其中 $\{g(n)\}$ 是满足：对 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $g(n+1)\geqslant g(n)$，$g(1)=1$ 的任意数列.

评析 解递推不等式的基本方法：通过引入参数列，转化为递推数列来解.

参数列可以直接引入，也可以对原递推不等式作适当变形后再引入，这要看所给递推不等式的外形结构特点而定. 如例 1，实际上也可直接设

$$f(n+1)-\left(1+\frac{1}{n}\right)f(n)=g(n),\ \forall g(n)\geqslant 0(n\geqslant 1),$$

但求解过程不如上面解法简洁.

例 2 设 f 为定义在所有正整数上的实函数，$f(1)=2$ 且

$$f(n+1)\geqslant 2f^2(n)\ (n\geqslant 1),$$

试求 $f(n)$.

解 由已知条件，易知 $f(n)>0$，在所给递推不等式两边取对数，得

$$\log_2 f(n+1)\geqslant 2\log_2 f(n)+1,$$

两边同加上 1，得

$$\log_2 f(n+1)+1\geqslant 2[\log_2 f(n)+1],$$

两边同除以 2^n 得

$$\frac{\log_2 f(n+1)+1}{2^n}\geqslant\frac{\log_2 f(n)+1}{2^{n-1}}.$$



令 $g(n)=\frac{\log_2 f(n)+1}{2^{n-1}}$，则 $g(1)=2$，$g(n+1)\geqslant g(n)$。

故所给递推不等式的解是 $f(n)=2^{2^{n-1}g(n)-1}$，其中任意数列 $g(n)$ 满足 $g(1)=2$，$g(n+1)\geqslant g(n)$。

评析 形如 $a_{n+1}\geqslant \alpha a_n^{\beta}(\alpha>0,\ a_1>0,\ \beta\neq 0)$ 可通过对数变换转化为一阶线性不等式来解 如：

设 f 为定义在所有正整数上的实函数，$a>0$，$b=1-af(1)>0$ 且

$$f(n+1)\leqslant f(n)[2-af(n)]\ (n\geqslant 1),$$

试求 $f(n)$。

提示：$\frac{1}{a}-f(n+1)\geqslant a\left[\frac{1}{a}-f(n)\right]^2(n\geqslant 1)$，下同例 2，略

例 3 设 f 为定义在所有正整数上的正值函数，$f(1)=1$ 且

$$f(n+1)\geqslant (n+1)f(n)+2n\ (n\geqslant 1),$$

试求 $f(n)$。

解 在所给递推不等式两边同除以 $(n+1)!$，得

$$\frac{f(n+1)}{(n+1)!}\geqslant\frac{f(n)}{n!}+\frac{2n}{(n+1)!},\ \frac{f(n+1)}{(n+1)!}\geqslant\frac{f(n)}{n!}+\frac{2(n+1-1)}{(n+1)!},$$

即 $$\frac{f(n+1)}{(n+1)!}\geqslant\frac{f(n)}{n!}+2\left[\frac{1}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}\right],\ \frac{f(n+1)+2}{(n+1)!}\geqslant\frac{f(n)+2}{n!}.$$

令 $\frac{f(n)+2}{n!}=g(n)$，则 $g(1)=\frac{f(1)+2}{1!}=3$，$g(n+1)\geqslant g(n)$。

所给函数不等式的解是 $f(n)=n!g(n)-2$，其中任意数列 $g(n)$ 满足 $g(1)=3$，$g(n+1)\geqslant g(n)$。

评析 一般地，设 $f(n)$ 是非零函数，则由递推关系式

$$a_{n+1}\geqslant f(n)a_n+d(n) \tag{1}$$

给出的数列 $\{a_n\}$ 的通项公式可用"逐和法"求出：在 (1) 式两边同除 $f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)$（或它的绝对值 $|f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)|$），得

$$\frac{a_{n+1}}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}\geqslant\frac{a_n}{f(n-1)\cdots f(2)f(1)}+\frac{d(n)}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)},$$

令 $\frac{a_n}{f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$，得 $b_{n+1}\geqslant b_n+\frac{d(n)}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)}$，

引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant 0)$，令



$$b_{n+1} = b_n + \frac{d(n)}{f(n)f(n-1)\cdots f(2)f(1)} + g(n),$$

再用"逐和法",由 $b_n = (b_n - b_{n-1}) + (b_{n-1} - b_{n-2}) + \cdots + (b_2 - b_1)$ 先求出 b_n,进而由 $a_n = f(n-1)\cdots f(2)f(1)b_n$ 求出所给函数不等式的解

例 4 设 $f(n)$ 为定义在自然数集上的正值函数,$f(1) = 1$ 且满足:

$$f(n-1) - f(n) \leqslant nf(n-1)f(n),\ \forall n \geqslant 2 \tag{1}$$

试求 $f(n)$.

解法 1 将(1)式两边同除 $f(n-1)f(n)$,可得

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} \leqslant n,\ \forall n \geqslant 2.$$

令 $$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} = g(n),\ \forall g(n) \leqslant n,\ n \geqslant 2. \tag{2}$$

依次以 2, 3, …, n 代入(2)式中的 n,可得

$$\frac{1}{f(2)} - \frac{1}{f(1)} = g(2), \tag{2}$$

$$\frac{1}{f(3)} - \frac{1}{f(2)} = g(3), \tag{3}$$

$$\cdots$$

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} = g(n).$$

将这 $n-1$ 个等式相加,得到

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(1)} = g(2) + g(3) + \cdots + g(n) = \sum_{i=2}^{n} g(i).$$

所以 $$f(n) = \frac{1}{1 + \sum\limits_{i=2}^{n} g(i)}.$$

解法 2 将(1)式两边同除以 $f(n-1)f(n)$ 可得

$$\frac{1}{f(n)} - \frac{1}{f(n-1)} \leqslant n,\ \forall n \geqslant 2.$$

$$\frac{1}{f(n)} - [n + (n-1) + \cdots + 2 + 1] \leqslant \frac{1}{f(n-1)} - [(n-1) + \cdots + 2 + 1].$$

令 $g(n) = \frac{1}{f(n)} - [n + (n-1) + \cdots + 2 + 1]$,则 $g(1) = \frac{1}{f(1)} - 1 = 0$,可得所给递



推不等式的解为

$$f(n)=\frac{2}{n(n+1)+2g(n)},$$

其中任意函数 $g(n)$ 满足 $g(1)=0$, $g(n)\leqslant g(n-1)$.

注 1 由 $\frac{1}{f(n)}-\frac{1}{f(1)}=g(2)+g(3)+\cdots+g(n)\leqslant 2+3+\cdots+n$

$$\Rightarrow \frac{1}{f(n)}\leqslant 1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

所以 $f(n)\geqslant\frac{2}{n(n+1)}$, $\forall n\in\mathbf{N}$.

注 2 这种方法多是用于将递推不等式转化为定义域是自然数的函数方程后，先找出 $f(n)$ 的某个递归公式，然后依次取 n 为自然数 $1, 2, \cdots, m$ 个值代入递归公式，得到 m 个等式；设法利用这些等式消去 $f(n)$ 以外其他形式的函数，即可求出所给不等式的解.递归数列求和实质上是将的解析式表示成某个数列的前几项之和.

例 5 已知整数数列 $\{a_n\}$ 中，$a_n\geqslant 2a_{n-1}+n$ (其中 n 是大于 1 的整数).

(1) 若 $\{a_n\}$ 是等差数列，求 $\{a_n\}$ 的通项公式

(2) $\{a_n\}$ 能否为等比数列?若可能，求其通项公式；若不能，请说明理由.

解 (1) $a_n=2a_{n-1}+g(n)$, $\forall g(n)\geqslant n$.

若 $\{a_n\}$ 是等差数列，设公差为 d，则 $a_n=a_1+(n-1)d$ 得

$$a_1+(n-1)d\geqslant 2[a_1+(n-2)d]+g(n),$$

$$g(n)=-a_1+(3-n)d\geqslant n,$$

即
$$a_1-3d+n(d+1)\leqslant 0(n\in\mathbf{Z}, n>1). \tag{1}$$

当且仅当 $\begin{cases}a_1-3d+d+1\leqslant 0\\ d+1\leqslant 0\end{cases}$ 即 $\begin{cases}a_1\leqslant 2d-1\\ d\leqslant -1\end{cases}$ 时，(1) 式恒成立.所以 $\{a_n\}$ 的通项公式为

$$a_n=a_1+(n-1)d \text{ 满足}\begin{cases}a_1\leqslant 2d-1,\\ d\leqslant -1.\end{cases}$$

(2) 若 $\{a_n\}$ 是等比数列，设公比为 q，则由 $a_n=2a_{n-1}+g(n)$，得

$$g(n)=a_1q^{n-1}-2a_1q^{n-2}=a_1(q-2)q^{n-2}\geqslant n.$$

解得 $q=\frac{3}{2}$, $a_1=-4$，但不满足 $a_1q^3=2a_1q^2+4$，即 $a_4=2a_3+4$，所以 $\{a_n\}$ 不可能为等比数列.



评析 本题是一个探索性问题，两个小题采用了不同的论证方法.(1)中用等差数列的通项公式，而(2)中只利用了等比数列的前几项进行检验，但殊途同归，矛盾的普遍性与特殊性在这里发挥了同样的作用.

事实上，题给的数列通项是可以用如下的方法直接求出来的：

解 由 $a_n \geq 2a_{n-1}+n$，得 $a_n+n+2 \geq 2(a_{n-1}+n+1)$，令 $b_n=a_n+n+2$，则 $b_n \geq 2b_{n-1}$，可见数列 $\{b_n\}$ 受等比型递归不等式约束. 引入任意函数 $g(n)(\geq 2)$，令 $b_n=g(n)b_{n-1}$，则可得 $b_n=b_1g(2)g(3)\cdots g(n)$，即

$$a_n+n+2=(a_1+3)g(2)g(3)\cdots g(n),\ a_n=-n-2+(a_1+3)g(2)g(3)\cdots g(n).$$

说明 条件中不等式改为等式，只要令 $g(n)=2$，就相应的可得.

$b_n=2b_{n-1}$，数列 $\{b_n\}$ 是等比型数列，$b_n=2^{n-1}b_1$，即 $a_n+n+2=2^{n-1}(a_1+3)$，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式是 $a_n=-n-2+2^{n-1}(a_1+3)$.

例 6 设 f 为定义在所有正整数上的实函数，$f(1)=1$，$f(2)=2$ 且

$$f(n+2) \geq f(n+1)-\frac{1}{4}f(n), \tag{1}$$

试求 $f(n)$.

解 将(1)改写为

$$f(n+2)-\frac{1}{2}f(n+1) \geq \frac{1}{2}\left[f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)\right]. \tag{2}$$

因为 $f(1)=1$，$f(2)=2$，所以由(2)可推知对 $\forall n \in \mathbf{N}^*$，$f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)>0$，因此我们可引入参函数 $g(n)(\forall g(n) \geq \frac{1}{2})$，令

$$f(n+2)-\frac{1}{2}f(n+1)=g(n)\left[f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)\right], \tag{3}$$

由(1)式可得

$$\begin{aligned} f(n+1)-\frac{1}{2}f(n) &= g(n-1)\left[f(n)-\frac{1}{2}f(n-1)\right] \\ &= g(n-1)g(n-2)\left[f(n-1)-\frac{1}{2}f(n-2)\right] \\ &= \cdots \\ &= g(n-1)g(n-2)\cdots g(1)\left[f(2)-\frac{1}{2}f(1)\right] \end{aligned}$$

$$f(n+1)-\frac{1}{2}f(n)=\frac{3}{2}g(n-1)g(n-2)\cdots g(1)$$



两边同乘 2^{n-1}，可得

$$2^{n}f(n+1)-2^{n-1}f(n)=3\times 2^{n-1}g(n-1)g(n-2)\cdots g(1). \tag{4}$$

令 $n=2,3,\cdots,n$，并将这 $n-1$ 个式子相加得

$$2^{n-1}f(n)=f(1)+3+6g(1)+12g(2)+\cdots+3\times 2^{n-1}g(n-1)g(n-2)\cdots g(1)$$

故所给不等式的解是

$$f(n)=\frac{1+3+6g(1)+12g(2)+\cdots+3\times 2^{n-1}g(n-1)g(n-2)\cdots g(1)}{2^{n-1}},$$

其中任意函数 $g(n)$ 满足 $g(n)\geqslant\frac{1}{2}$.

注 当 $g(n)=\frac{1}{2}$ 时，得到满足 $f(1)=1$、$f(2)=2$ 且

$$f(n+2)=f(n+1)-\frac{1}{4}f(n)$$

的函数方程的解是 $f(n)=\frac{6n-4}{2^{n}}=\frac{3n-2}{2^{n-1}}$.

例 7 设 f 为定义在所有正整数上的实函数，$f(1)=\frac{1}{2}$ 且

$$f(n+1)\geqslant\frac{3f(n)}{2f(n)+1}\quad(n\geqslant 1). \tag{1}$$

若递推不等式的解可表示为 $f(n)=\frac{3^{n}}{3^{n}+g(n)}$，试判断 $\{g(n)\}$ 的单调性.

解 由已知条件，易知 $f(n)>0$. 在(1)两边取倒数，得

$$2+\frac{1}{f(n)}\geqslant\frac{3}{f(n+1)}\ (n\geqslant 1). \tag{2}$$

两边同减去 3，得

$$\frac{1}{f(n)}-1\geqslant 3\left[\frac{1}{f(n+1)}-1\right],$$

两边同乘 3^{n}，得

$$3^{n}\left[\frac{1}{f(n)}-1\right]\geqslant 3^{n+1}\left[\frac{1}{f(n+1)}-1\right].$$

令 $3^{n}\left[\frac{1}{f(n)}-1\right]=g(n)$，满足 $g(1)=3\left[\frac{1}{f(1)}-1\right]=3$，$g(n)\geqslant g(n+1)$，

由此可见，$\{g(n)\}$ 是单调递减数列.



评析 在(2)中令 $\varphi(n)=\dfrac{1}{f(n)}$，则可化为关于 $\varphi(n)$ 的一阶线性不等式再解。

一般地，形如 $\alpha a_{n+1}a_n+\beta a_{n+1}+\gamma a_n\geqslant 0$ 的不等式，如果对任意正整数 n，都有 $a_{n+1}a_n>0$（或 $a_{n+1}a_n<0$），一般可通过取倒数，转化为一阶线性不等式再解。

本例也可直接将 $f(n)=\dfrac{3^n}{3^n+g(n)}$ 代入(1)中进行判断。

例8 整数数列 $\{a_n\}$ 定义如下：

$$a_1=2,\ a_2=7,\ -\frac{1}{2}<a_{n+1}-\frac{a_n^2}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{2},\ n=2,3,\cdots$$

求该数列的通项 a_n。

解 题设递推式难以确定 a_n，能否由条件得出熟悉的常系数线性递推式呢？大胆猜测：$a_{n+1}=pa_n+qa_{n-1}$，p、q 为待定的常数。

试算该数列的前面几项，可知 $a_1=2$，$a_2=7$，$a_3=25$，$a_4=89$，… 确定猜测中的 p，q 的值，猜想：$a_{n+1}=3a_n+2a_{n-1}$，$n\geqslant 2$。

下面用数学归纳法证明上述猜想。

当 $n=2$，3 时，上述猜想成立。

设对 $k\leqslant n$ 时，均有 $a_{k+1}=3a_k+2a_{k-1}$ 成立，则对 $k=n+1$ 的情形，有

$$\frac{a_{n+1}^2}{a_n}=\frac{a_{n+1}(3a_n+2a_{n-1})}{a_n}=3a_{n+1}+2a_n+2\left(\frac{a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2}{a_n}\right)$$

注意到 $\left|2\left(\dfrac{a_{n+1}a_{n-1}-a_n^2}{a_n}\right)\right|=\left|\dfrac{2a_{n-1}}{a_n}\right|\left|a_{n+1}-\dfrac{a_n^2}{a_{n-1}}\right|\leqslant\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{2a_{n-1}}{a_n}\right|$。

由前面的归纳假设，易知 $a_n>2a_{n-1}$，所以 $\left|3a_{n+1}+2a_n-\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|<\dfrac{1}{2}$。

利用 a_{n+2} 为整数，且 $\left|a_{n+2}-\dfrac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|<\dfrac{1}{2}$，可知

$$|a_{n+2}-(3a_{n+1}+2a_n)|\leqslant\left|a_{n+2}-\frac{a_{n+1}^2}{a_n}\right|+\left|\frac{a_{n+1}^2}{a_n}-(3a_{n+1}+2a_n)\right|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

所以 $a_{n+2}=3a_{n+1}+2a_n$，于是猜想对 $k=n+1$ 的情形成立。

综上可知，数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_1=2$，$a_2=7$，$a_n=3a_{n-1}+2a_{n-2}$，$n=3$，4，…，利用特征方程法求解这个常系数齐次线性递推式，可得

$$a_n=\frac{17+5\sqrt{17}}{68}\left(\frac{3+\sqrt{17}}{2}\right)^n+\frac{17-5\sqrt{17}}{68}\left(\frac{3-\sqrt{17}}{2}\right)^n.$$

说明 本题中的数列 $\{a_n\}$ 由递推不等式给出，且惟一确定，求解方法是猜测证明法。



这种先猜后证的方法需要有一定的胆识和数学直觉，它是数学发现的主要途径之一。

例 9 已知 $f(1)>2$，解递推不等式 $f(n+1)\geqslant f^2(n)-2$，$n\in\mathbf{N}^*$。

解 由已知 $f(1)>2$，结合 $f(n+1)\geqslant f^2(n)-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，可推知 $f(n)>2$。因此可令设定 $h(n)>1$，$f(n)=h(n)+\dfrac{1}{h(n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$，代入所给递推不等式，得

$$h(n+1)+\frac{1}{h(n+1)}\geqslant\left[h(n)+\frac{1}{h(n)}\right]^2-2,$$

即
$$h(n+1)+\frac{1}{h(n+1)}\geqslant h^2(n)+\frac{1}{h^2(n)}. \tag{1}$$

由递推不等式(1)可得

$$h(n+1)-h^2(n)\geqslant\frac{1}{h^2(n)}-\frac{1}{h(n+1)},\ [h(n+1)-h^2(n)]\left[1-\frac{1}{h^2(n)h(n+1)}\right]\geqslant 0$$

记 $a=h(1)>1$，由上可得：

$$h(n+1)\geqslant h^2(n+1),\ \log_a h(n+1)\geqslant 2\log_a h(n),\ \frac{\log_a h(n+1)}{2^n}\geqslant\frac{\log_a h(n)}{2^{n-1}},$$

令 $g(n)=\dfrac{\log_a h(n)}{2^{n-1}}$，则 $g(n+1)\geqslant g(n)$，$g(1)=\dfrac{\log_a h(1)}{2^0}=1$。于是，$h(n)=a^{2^{n-1}g(n)}$，所以题给递推不等式的通解是 $f(n)=a^{2^{n-1}g(n)}+a^{-2^{n-1}g(n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$。

其中 $\{g(n)\}$ 是单调递增且 $g(1)=1$ 的任意数列，$a=h(1)>1$ 满足关系式 $h(1)+\dfrac{1}{h(1)}=f(1)$。

例 10 设 $\varphi_1(x)=x$，$\varphi_2(x)=x^3+3x$，且 $\varphi_{k+2}(x)=(x^2+2)\varphi_{k+1}(x)-\varphi_k(x)$，$k\in\mathbf{N}^*$。若 $f(1)=a$，试解递推不等式 (1) $f_{n+1}(x)\geqslant\varphi_k[f_n(x)]$；(2) $f_n(x)\geqslant\varphi_k[f_{n+1}(x)]$。

解 (1) 由于方程 $t-\dfrac{1}{t}=a$ 对任意的实数 a 都有正数解，所以我们可设

$$f_n(x)=t_n-\frac{1}{t_n},\ t_n>0,\ n=1,2,3,\cdots$$

由于 $\varphi_1\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=t-\dfrac{1}{t}$，$\varphi_2\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=t^3-\dfrac{1}{t^3}$，…，用数学归纳法不难证明 $\varphi_k\left(t-\dfrac{1}{t}\right)=t^{2k-1}-\dfrac{1}{t^{2k-1}}$。

因而由 $f_{n+1}(x)\geqslant\varphi_k[f_n(x)]$ 得 $t_{n+1}-\dfrac{1}{t_{n+1}}\geqslant t_n^{2k-1}-\dfrac{1}{t_n^{2k-1}}$，$t_{n+1}-t_n^{2k-1}\geqslant\dfrac{1}{t_{n+1}}-\dfrac{1}{t_n^{2k-1}}$，



所以$(t_{n+1}-t_n^{2k-1})\left(1+\frac{1}{t_{n+1}t_n^{2k-1}}\right)\geqslant 0$，由于已设 $t_n>0$，$n=1,2,3,\cdots$，可得 $t_{n+1}\geqslant t_n^{2k-1}$，两边取对数，得

$$\log_{t_1} t_{n+1}\geqslant (2k-1)\log_{t_1} t_n,\ \frac{\log_{t_1} t_{n+1}}{(2k-1)^n}\geqslant \frac{\log_{t_1} t_n}{(2k-1)^{n-1}}$$

令 $g(n)=\frac{\log_{t_1} t_n}{(2k-1)^{n-1}}$，则上式即 $g(n+1)\geqslant g(n)$，且 $g(1)=\frac{\log_{t_1} t_1}{(2k-1)^0}=1$ 故题给递推不等式的解为 $f_n(x)=t_n-\frac{1}{t_n}$，其中 $t_n=t_1^{(2k-1)^{n-1}g(n)}$，$\{g(n)\}$ 是单调递增且 $g(1)=1$ 的任意数列.

(2) 类似(1)，由 $f_n(x)\geqslant \varphi_k[f_{n+1}(x)]$ 可得 $t_n-\frac{1}{t_n}\geqslant t_{n+1}^{2k-1}-\frac{1}{t_{n+1}^{2k-1}}$，进而可得 $t_n\geqslant t_{n+1}^{2k-1}$，两边取对数，得 $\log_{t_1} t_n\geqslant (2k-1)\log_{t_1} t_{n+1}$，$(2k-1)^{n-1}\log_{t_1} t_n\geqslant (2k-1)^n\log_{t_1} t_{n+1}$，令 $g(n)=(2k-1)^{n-1}\log_{t_1} t_n$，最后可得题给递推不等式的解为 $f_n(x)=t_n-\frac{1}{t_n}$，其中 $t_n=t_1^{\left(\frac{1}{2k-1}\right)^{n-1}g(n)}$，$\{g(n)\}$ 是单调递减且 $g(1)=1$ 的任意数列.

能力训练

1. (2007 年全国高中数学联合竞赛(江苏省赛区)初赛试题) 已知数列 $\{a_n\}$ 中，$a_1=1$，$a_{n+3}\leqslant a_n+3$，$a_{n+2}\geqslant a_n+2$. 求 a_{2007}.

2. 设 f 为定义在所有正整数上的正值函数，$f(1)=1$ 且 $nf(n+1)\geqslant(1+n)f(n)+a$，$(n\geqslant 1,\ a\in\mathbf{R})$，试求 $f(n)$.

3. 已知 $f(1)=\sqrt{5}$，递推不等式 $f(n+1)\geqslant f^2(n)-2$，$n\in\mathbf{N}^*$ 的解可表示为 $f(n)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{g(n)}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{g(n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$. 若 $g(n)\geqslant 1$，$n\in\mathbf{N}^*$，则 $g(n)\geqslant 2^{n-1}$.

4. 设 M 是满足 $f(0)\neq 0$ 与 $f(n)f(m)\geqslant f(n+m)+f(n-m)$，$n,m\in\mathbf{Z}$ 的函数 $f:\mathbf{Z}\to\mathbf{R}$ 之集合，试求

(1) 满足 $f(1)=\frac{5}{2}$ 的一个函数 $f(n)\in M$；

(2) 满足 $f(1)=\sqrt{3}$ 的一个函数 $f(n)\in M$.

5. 设 f 为定义在所有正整数上的正值函数，$f(1)=1$ 且

$$f(n+1)\geqslant 2f(n)+3n-1\ (n\geqslant 1) \qquad (1)$$



试求 $f(n)$

6. 设 f 为定义在所有正整数上的正值函数，$f(1)=9$ 且 $f(n+1)-4f(n)-20\times\sqrt{f(n)}\geqslant 25(n\geqslant 1)$，试求 $f(n)$.

7. 设 $f(n)$ 为定义在自然数上的函数，$f(1)=1$ 且满足：$f(n)\geqslant 3^{n+1}f(n-1)$，$\forall n\geqslant 2$，试求 $f(n)$.

8. 设 f 为定义在所有正整数上的正值函数，$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)$，$f(1)=1$ 且 $S_n\geqslant\frac{1}{2}\left[f(n)+\frac{1}{f(n)}\right]$，求 $f(n)$.

9. 设 f 为定义在所有正整数上的实函数，$f(1)=3$ 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(i)\geqslant 4f(n)+2(n\geqslant 1)$，试求 $f(n)$.

10. 设 $f(1)=1$，$f(2)=3$ 且满足：$f(n)\geqslant 3f(n-1)-2f(n-2)$，$\forall n\geqslant 3$，试求 $f(n)$.

11. 设 $f(1)=1$，$f(2)=8$ 且满足：$f(n)\geqslant\sqrt{f(n-1)f(n-2)}$，$\forall n\in\mathbf{N}$，$n\geqslant 3$，试求 $f(n)$.

12. 设 $f(1)=2$ 且 $f(n+1)\geqslant\frac{f(n)+2}{2f(n)+1}$，试求 $f(n)$.

13. 设函数 $f:\mathbf{N}^*\to\mathbf{R}^+$，$f(1)=1$，试解递推不等式 $f(n+1)\geqslant af^{\alpha}(n)$，($a$，$\alpha>0$，$\alpha\neq 1$).

14. 设 $f(1)=t>2$，$a>0$，$f(n)$ 满足分式线性递推不等式 $f(n+1)\geqslant\frac{1}{2}\left[f(n)+\frac{a}{f(n)}\right]$，试求 $f(n)$.

15. 设 $f(1)=\sqrt{5}$，解递推不等式 $f(n+1)\geqslant f^2(n)-3f(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$.

16. 求证：由 $a_1=3$，$a_2=5$ 及不等式 $\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}-n}<a_n<\sqrt{a_{n-1}a_{n+1}+n}(n\geqslant 2$，$n\in\mathbf{N})$ 可惟一确定正整数列 $\{a_n\}$.

17. 设 f 为定义在所有正整数上的实函数，$f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(3)=2$ 且 $f(n+3)\leqslant\frac{4}{3}f(n+2)+\frac{1}{3}f(n+1)-\frac{2}{3}f(n)$，试求 $f(n)$.

18. (2007 年江西省高考理科卷压轴题) 设正整数数列 $\{a_n\}$ 满足：$a_2=4$，且对于任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 有 $2+\frac{1}{a_{n+1}}<\dfrac{\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}}{\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}}<2+\frac{1}{a_n}$.

(1) 求 a_1，a_3；

(2) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式 a_n.



第6讲 其他可转化为递推的问题

知识扫描

数列是一类特殊的函数，它广泛地存在于科学研究、工程技术、日常生活之中，我们能够举出许多有关数列的例子，并且得心应手地处理其中的一些特殊数列，但是由于数列的表现形式各异，有些数列构成规律的呈现方式较为复杂，给解决问题带来了一些困难。从前5讲的讨论中可以看出，递推不仅是我们对待事物的一种认识，更是解决问题的一种重要思想和方法。利用递推思想解题深刻独特、简洁明快，所以在问题解决的过程中，我们应努力树立递推的意识。

在本讲中，我们将讨论其他可转化为递推的问题，如编程问题、计数问题、编号问题、概率问题、染色问题、实验操作性问题等，它们本身与正整数相关，或可通过转化为与正整数相关的问题。

例题分析

例1 有人编了一个程序：从1开始，交错地做加法或乘法（第一次可以是加法，也可以是乘法）。每次加法，将上次的运算结果加2或加3；每次做乘法，将上次的运算结果乘2或乘3。例如：30可以这样得到：$1\xrightarrow{+3}4\xrightarrow{\times 2}8\xrightarrow{+2}10\xrightarrow{\times 3}30$。证明：

(1) 可以得到22；

(2) 可以得到$2^{100}+2^{97}-2$。

证明 构造递推数列$\{a_n\}$，将上次的运算结果乘2后加2对应的记为a_n，且$a_1=1$，依题意得$a_n=2a_{n-1}+2$，$a_{n-1}=2a_{n-2}+2(n>2)$，两式相减得

$$a_n-a_{n-1}=2(a_{n-1}-a_{n-2})=2^2(a_{n-2}-a_{n-3})=\cdots=2^{n-2}(a_2-a_1)=3\cdot 2^{n-2},$$

由此得 $$\begin{aligned} a_n &= a_1 + (a_2 - a_1) + (a_3 - a_2) + \cdots + (a_n - a_{n-1}) \\ &= 1 + 3(1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{n-2}) \\ &= 1 + 3 \cdot \frac{2^{n-1} - 1}{2 - 1} \\ &= 3 \cdot 2^{n-1} - 2. \end{aligned} \tag{1}$$

当 $n=4$ 时，$a_4 = 3 \cdot 2^3 - 2 = 22$，即为本题中第(1)问的答案. 因此，(1)式是该题的一般情形. 在此基础上将(1)式乘2加3得 $3 \cdot 2^n - 1$，再将它乘3加2得：$9 \cdot 2^n - 1$，最后，将它乘2得 $9 \cdot 2^{n+1} - 2 = 2^{n+4} + 2^{n+1} - 2$. 这就是第(2)问的一般情形. 当 $n=96$ 时，值为 $2^{100} + 2^{97} - 2$，是本题的结果.

说明 利用递推数列不仅推广了这道题的结论，还揭示了该题中两问题间的内在联系.

例2 4个球的大圆最多可将一个球面分成 部分.

一个大圆将球面分成 $a_1=2$ 个部分，2个大圆将球面分成 $a_2=4$ 个部分，注意到，第3个大圆被前面两个大圆分成4段弧，而每段弧均使它所在的区域一分为二，共使球面增加4个部分，所以，3个大圆将球面分成 $a_3=a_2+4=8$ 个部分.

同理，第4个大圆被前3个大圆分成6段，使球面增加6个部分，4个大圆将球面分成 $a_4=a_3+6=14$ 个部分. 所以，4个球的大圆最多可将球面分成14个部分.

说明 问题可以推广为：(1) n 个大圆可将一个球面分成几部分？

解 设 n 个大圆最多可将一个球面分成 a_n 个部分，易知：$a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$，….

第 n 个大圆被前 $n-1$ 个大圆分成 $2(n-1)$ 段，每段均将它所在的区域一分为二，共使球面增加了 $2(n-1)$ 个部分，即 $a_n = a_{n-1} + 2(n-1)$.

所以 $$a_n = \sum_{k=1}^{n-1} 2k + 2 = n^2 - n + 2.$$

将 $n=4$ 代入，得：$a_4=14$，这便是原题.

那么，这 n 个大圆最多可将球体分成多少个部分？事实上，每个球面的一个部分都对应着球体的一个部分，所以，这 n 个大圆最多也可将球体分成 n^2-n+2 个部分.

(2) 球面的 n 个圆(大圆或小圆)最多可将球体分成几个部分？

解 这个问题与前面提到的问题有所不同. 设最多可分成 a_n 个部分，虽然 $a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=8$ 一样，但第 $n+1$ 个圆面被前 n 个圆面分成 $(n^2+n+2)/2$ 块，(同样应用递推数列知识推得)每一块使它所在的球体部分一分为二，共增加 $(n^2+n+2)/2$ 个部分，所以

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{2}(n^2+n+2),\ a_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k^2+k+2}{2} + 2 = \frac{(n+1)(n^2-n+6)}{6}.$$



解计数问题往往需要综合运用许多数学思想方法与解题技巧，是考察数学能力的好素材。

例3 现有1，2，3，4，5五个编了号的小球和五个编了号的小箱，现要将五个球放入五个箱中，且1号球不能放在1号箱中，2号球不能放在2号箱中，…，5号球不能放在5号箱中，每个箱中只能放一个小球，问有多少种不同解法？

分析 下面来看这类题的一般形式：

现有$1,2,3,\cdots,n$，n个编了号的小球和n个编了号的箱，一个球放在一个箱里且不对号，有多少种不同放法？

解 设n个球时共有a_n种放法，则不同个数球的放法数对应于数列$\{a_n\}$。

①号球共有$n-1$种放法，不妨设将其放入2号箱中，此时剩下$n-1$个球和$n-1$个箱，如图6－1所示）。

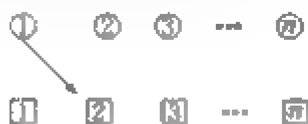


图6-1

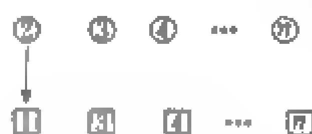


图6-2

②号球可放入1号箱，也可以放到其他箱中，当②号球入1号箱时，余下的$n-2$个小球和$n-2$个小箱恰好一一对号（如图6－2所示），则余下的球共有a_{n-2}种不同放法。

当②号球不放入1号箱时，②号球相当于①号球，那么这时$n-1$个球和$n-1$个箱共有a_{n-1}种不同放法。

综上可知，n个球的不对号入箱的方法为$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，易知$a_1=0$，$a_2=1$，则可得：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	…
a_n	0	1	2	9	44	265	1854	14833	133496	…

有了此公式，就可以较容易地解决这类问题．本题为$n=5$时的特殊情况，答案为44种。

说明 $\{a_n\}$的通项公式是可以求出来的。

由$a_n=(n-1)(a_{n-1}+a_{n-2})$，得$a_n-na_{n-1}=-[a_{n-1}-(n-1)a_{n-2}]$。

令$b_n=a_{n+1}-(n+1)a_n$，则数列$\{b_n\}$是以$a_2-2a_1=1$为首项，-1为公比的等比数列，则$b_{n-1}=(-1)^{n-2}=(-1)^n$，即$a_n-na_{n-1}=(-1)^n$，两边同除以$n!$有$\frac{a_n}{n!}-\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}=\frac{(-1)^n}{n!}$．令$C_n=\frac{a_n}{n!}$，有$C_n-C_{n-1}=\frac{(-1)^n}{n!}$。

所以 $$C_n=\frac{(-1)^n}{n!}+\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots+\frac{(-1)^2}{2!}+\frac{a_1}{1!}=\sum_{i=2}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}\ (n\geqslant 2)$$



所以
$$a_n=\begin{cases} n!\sum\limits_{i=2}^{n}\dfrac{(-1)^i}{i!}, & n\geqslant 2,\\ 0, & n=1. \end{cases}$$

例 4 比较两个幂 2007^{2008} 和 2008^{2007} 的大小.

分析 这是底数和指数都取特殊值的幂.由于数据大,难以得出谁大谁小的结论.不妨先考察一般问题:

比较两个幂 n^{n+1} 与 $(n+1)^n$ 的大小($n\in\mathbf{N}$).让 n 取特殊值:

当 $n=1,2$ 时,$n^{n+1}<(n+1)^n$;当 $n=3,4,5$ 时,$n^{n+1}>(n+1)^n$.

猜想,当 $n\geqslant 3$ 时,应成立 $n^{n+1}>(n+1)^n$.

事实上,令 $f(n)=\dfrac{(n+1)^n}{n^{n+1}}(n\geqslant 3,\ n\in\mathbf{N})$,则

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^{n+2}}\div\frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}=\left(\frac{n^2+2n}{n^2+2n+1}\right)^{n+1}<1.$$

所以
$$f(n+1)<f(n)<f(n-1)<\cdots<f(3)=\frac{4^3}{3^4}<1,$$

即 $n^{n+1}>(n+1)^n(n\geqslant 3,\ n\in\mathbf{N})$.取 $n=2007$,则得 $2007^{2008}>2008^{2007}$.

说明 普遍性寓于特殊性之中,特殊问题得到了解决,一般问题的解决就有了切入点.比如,有关函数的问题,可先让函数取特殊值;有关曲线位置的问题,可先让曲线过特殊点;有关三角形、四边形的问题,可先考察特殊三角形(等腰、等边、直角三角形)、特殊四边形(平行四边形、梯形等).

还需指出:一般与特殊是相对而言的.就 $2007^{2008}>2008^{2007}$ 而言,$n^{n+1}>(n+1)^n$ 是一般问题;然而对更一般的不等式 $b^a>a^b(a>b>e,a,b\in\mathbf{R})$ 而言,$n^{n+1}>(n+1)^n$ 是特殊问题.

可见,特殊问题和一般问题是相对的.在一定场合为特殊性的东西,在另一场合则成为普遍性;反之亦然.因此,从辩证的角度看问题,一般问题的解决有赖于从特殊问题的思考中发现线索;一般问题解决以后,又可以解决更多更新的特殊问题.

例 5 (2004 年安徽省高中数学竞赛题)甲、乙两人轮流掷一个均匀的硬币,谁先掷出正面,谁获胜.他们玩了好多局,而且前一局的输家下一局先掷.若甲第一局先掷,则第 6 局甲获胜的概率是多少?

解 任一局比赛,先掷的人胜的概率为

$$\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\left(\frac{1}{2}\right)^5+\cdots=\frac{\frac{1}{2}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{2}{3},$$



后掷的人胜的概率为 $1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$，设甲胜第 k 局的概率为 P_k，则 $P_1=\frac{2}{3}$. 由于{第 k 局甲胜}={第 $k-1$ 局甲胜第 k 局甲胜}+{第 $k-1$ 局乙胜且第 k 局甲胜}，

故
$$P_k=\frac{1}{3}P_{k-1}+\frac{2}{3}(1-P_{k-1})=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}P_{k-1}.$$

所以
$$P_k-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(P_{k-1}-\frac{1}{2}\right).$$

所以
$$P_k=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{3^{k-1}}\left(P_1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}+\frac{(-1)^{k-1}}{2\cdot 3^k}.$$

所以
$$P_6=\frac{364}{729}.$$

说明 用数列知识求解概率问题的关键是，根据互斥事件的概率加法公式或相互独立事件的概率乘法公式，建立递推关系式，再利用数列知识求解.

例6 （第3届美国数学邀请赛）设正四面体的四个顶点是 A，B，C，D，各棱长度为1米，有一个小虫从 A 点开始按以下规则前进：在每一个顶点处用同样的概率选择通过这个顶点的三条棱之一，并一直爬到这个棱的尽头，设它爬了7米之后恰好位于顶点 A 的概率为 $P=\frac{n}{729}$，求 n 的值.

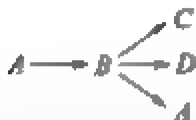


图6-3

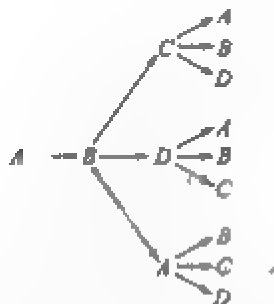


图6-4

分析 由于只爬了7米，我们可以用枚举的方法把可能性数出来. 显然若只走了0米，即小虫在 A 点不动，则概率为1，若走了1米，即 $A\to B$(或 C，D)，此时显然回不到 A 点，概率为0，若走了2米，如图6-3所示，回到 A 的可能性是 $\frac{1}{3}$，若走了3米，继续上面的工作，从 A 出发再走一定回不到 A，而从 C，D 出发都各有 $\frac{1}{3}$ 的可能性回到 A，如图6-4所示，即显然有 $\frac{2}{9}$ 的可能性. 由此可以看出，小虫走了4米时，与它走完3米没有达到

A 点的概率有关，这样逐步推算出来，可以得到走了 7 米时，$P=\frac{182}{729}$，即 $n=182$ 这个方法虽然很直观，但当数字比较大时，比如走了 17 米，1988 米时，就不好一一枚举了，但是我们可以从这个解法中得到启发，找出一个一般的方法，即当走过 k 米时，先研究已走 $k-1$米的概率，得到下面的解法

解 设 a_k 表示小虫走过 k 米后回到 A 点的概率.

若小虫走过 $k-1$ 米而不在 A 点，则概率是 $1-a_{k-1}$，而从 A 以外的一点走向 A 点的概率是 $\frac{1}{3}$，于是有 $a_k=\frac{1}{3}(1-a_{k-1})$. 显然 $a_0=1$，$a_1=0$，由此推出 $a_2=\frac{1}{3}$，$a_3=\frac{2}{9}$，$a_4=\frac{7}{27}$，$a_5=\frac{20}{81}$，$a_6=\frac{61}{243}$，$a_7=\frac{182}{729}$，于是 $n=182$.

说明 一般地，我们可以得出一个通项公式 $a_k=\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^k+\frac{1}{4}$，由此可求出小虫走了 k 米后又回到 A 点的概率.

概率问题蕴含着许多丰富的数学思想和方法，构建模型有助于轻松地解读概率问题的实质和本质；构建模型，搭起挖掘知识的内涵与外延的平台，架起未知到已知的"桥梁"，打通各个环节的"结点"，凸现知识的来龙去脉，达到化归目标的目的.

概率和数列这两块知识的交叉渗透使平淡的概率计算增添了几分灵气，也使数列内容变得更有活力.

例 7 设$\angle A$ 和$\angle E$ 为一个正八边形中相对的两个顶角，一只青蛙从顶点 A 开始跳，在八边形除 E 外的其他顶点，该青蛙可能跳向相邻两个顶点中的任何一个，当青蛙到达点 E 后就停下来，若青蛙跳到点 E 共跳了 n 次，用 a_n 表示这 n 次跳动可能采取的路径的数目. 证明：$a_{2n-1}=0$，$a_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$，$n=1,2,3,\cdots$，其中 $x=2+\sqrt{2}$，$y=2-\sqrt{2}$.

证明 青蛙不能在跳 4 次之内到达点 E，故 $a_1=a_2=a_3=0$；它能按两条路径跳 4 次跳到点 E，故 $a_4=2$.

从点 A 作奇数次跳，青蛙可能到达点 B、D、F、H，但不可能到达点 E，如图 6－5 所示，故 $a_{2n-1}=0$(对于所有的 n).

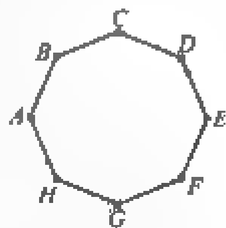


图 6－5

现在，用 b_n 表示从点 C 开始以 n 次跳最后跳到点 E 的各不同路径的数目(这与从点 G 开始一样)，从点 C 跳 2 次到点 E 只有一种路径，故 $b_2=1$.

青蛙从点 A 起跳跳 2 次之后，它可能在点 C、G 或返回到点 A. 它可以有两种路径返回 A，即 $A\to B\to A$ 或 $A\to H\to A$，故从 A 到 E 跳 n 次的路径数 a_n 等于从点 C、G 跳 $n-2$ 次到达点 E 的路径数加上从 A 到 E 跳 $n-2$

次的路径数的2倍，

即 $$a_n=2b_{n-2}+2a_{n-2}.\tag{1}$$

当青蛙从点C开始跳并跳了大于2次的次数，前2次的结果或落在点A或落在点C(因为若落在点E它不能再跳，即只跳了2次)。所以路径数$b_n(n>2)$等于从A起跳跳$n-2$次到点E的路径数加上从C起跳跳$n-2$次到点E的路径数的2倍(因为前2次跳可能为$C\to D\to C$或$C\to B\to C$)。

故 $$b_n=2b_{n-2}+a_{n-2},n>2.\tag{2}$$

(1)式−(2)式得$b_n-a_n=-a_{n-2}$，用$n-2$代替n得$b_{n-2}=a_{n-2}-a_{n-4}$，代入(1)式得

$$a_n=4a_{n-2}-2a_{n-4},n>4.\tag{3}$$

很清楚，由$a_2=0,a_4=2$及(3)式可以惟一地确定数列$\{a_n\}$。因此，我们只需证明题中所给的答案，$c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$满足$c_2=0,c_4=2$((3)式的初值)及(3)式(其中$n$值已用$2n$代换)，即$c_{2n}=4c_{2n-2}-2c_{2n-4}$。因为$x=2+\sqrt{2},y=2-\sqrt{2}$为方程$t^2-4t+2=0$的根，同时也是方程$p(t)=t^{n-1}-4t^{n-2}+2t^{n-3}=0$的根，因此$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)[p(x)-p(y)]=0$，或

$$\frac{x^{n-1}-y^{n-1}}{2}-4\frac{x^{n-2}-y^{n-2}}{2}+2\frac{x^{n-3}-y^{n-3}}{2}=0,$$

且$c_{2n}=4c_{2n-2}-2c_{2n-4}$。由于(3)式在给定条件下的解是惟一的，我们可将$a_{2n}$与$c_{2n}$相等同，则$a_{2n}=c_{2n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(x^{n-1}-y^{n-1})$。

说明 在这个解中，我们使用了题中给出的公式且证明它满足我们推导出的关系式(3)，但若没有给出任何公式，我们自己能求出吗？回答是肯定的。

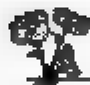
例8 (*2005年湖南省高考理科卷第20题*)自然状态下的鱼类是一种可再生资源，为持续利用这一资源，需从宏观上考察其再生能力及捕捞强度对鱼群总量的影响。用x_n表示某鱼群在第n年年初的总量，$n\in\mathbf{N}^*$，且$x_1>0$。不考虑其他因素，设在第n年内鱼群的繁殖量及捕捞量都与x_n成正比，死亡量与x_n^2成正比，这些比例系数依次为正常数a,b,c。

(1) 求x_{n+1}与x_n的关系式；

(2) 猜测：当且仅当x_1，a，b，c满足什么条件时，每年年初鱼群的总量保持不变？(不要求证明)

(3) 设$a=2,c=1$，为保证对任意$x_1\in(0,2)$，都有$x_n>0,n\in\mathbf{N}^*$，则捕捞强度b的最大允许值是多少？证明你的结论。

分析 (1) 从第n年年初到第$n+1$年年初，鱼群的繁殖量为ax_n，被捕捞量为bx_n，死



亡量为cx_n^2，因此$x_{n+1}-x_n=ax_n-bx_n-cx_n^2,n\in N^*$。即$x_{n+1}=x_n(a-b+1-cx_n),n\in N^*$。

(2) 欲使每年年初鱼群总量保持不变，由图6-6知：只需x_1等于直线$y=x$与抛物线$y=-cx^2+(a-b+1)x$的交点P的横坐标，即：$x_1=\frac{a-b}{c}$。又因为$x_1>0$，所以$a>b$，故猜测：当且仅当$a>b$，且$x_1=\frac{a-b}{c}$时，每年年初鱼群的总量保持不变。

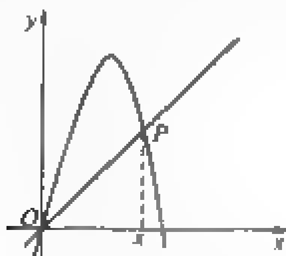


图6-6

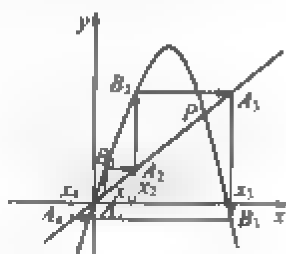


图6-7

(3) 当$a=2,c=1$时，得：$x_{n+1}=x_n(3-b-x_n),n\in N^*$，抛物线$y=-x^2+(3-b)x$的顶点坐标是$\left(\frac{3-b}{2},\frac{(3-b)^2}{4}\right)$，与$x$轴的非零交点坐标是$(3-b,0)$。

① 由图6-7知抛物线$y=-x^2+(3-b)x$的顶点纵坐标大于抛物线与此x轴的非零交点横坐标时，若A_n的横坐标大于交点$(3-b,0)$的横坐标则有$x_n<0$。比方说图6-7中A_n的横坐标大于交点的横坐标，则有$x_n<0$。

② 由图6-8，图6-9知抛物线$y=-x^2+(3-b)x$的顶点坐标小于抛物线与x轴的非零交点横坐标时，若A_n的横坐标小于交点$(3-b,0)$的横坐标时总有$x_n>0$。

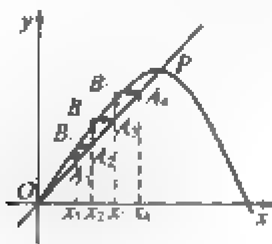


图6-8

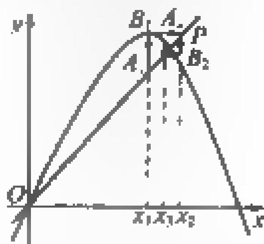


图6-9

综上所述：捕捞强度b的数学条件是$\begin{cases}\frac{(3-b)^2}{4}<3-b,\\ 0<x_1<3-b,\end{cases}$解得，$0<b\leqslant 1$。所以为保证对任意$x_1\in(0,2)$，都有$x_n>0,n\in N^*$，则捕捞强度$b$的最大允许值是1。

说明 抽象的递推数列问题通过直线"$y=x$"模型求解，由于图形提供了直观的视觉

信息，使抽象的递推数列的项、单调性、最值、极限等数列性质呈现得直观、简洁.

例 9 如图 6-10 所示，一树形图，第 1 层是一条与水平线垂直的线段，长度为 1；第 2 层在第 1 层线段的前端作两条与该段均成 135°的线段，长度为其一半；第 3 层按第 2 层的方法在每一线段的前端生成两条线段；重复前面的做法作图至第 n 层. 设树形图的第 n 层的最高点到水平线的距离为第 n 层树形图的高度.

(1) 求第 3 层及第 4 层树形图的高度 H_3、H_4；

(2) 求第 n 层树形图的高度 H_n；

(3) 若树形图的高度大于 2，则称树形图为"高大"，否则称为"矮小". 显然，当 $n=1,2$ 时是"矮小"的，是否存在 $m\in \mathbf{Z}$，使得当 $n>m$ 时，该树形图是"高大"的？



图 6-10

解 (1) 设题中树(从下而上)新生的各层高度所构成的数列为 $\{a_n\}$，则易得第 3 层树形图的高度：$H_3=a_1+a_2+a_3=\frac{5+\sqrt{2}}{4}$，第 4 层树形图的高度：$H_4=a_1+a_2+a_3+a_4=\frac{20+5\sqrt{2}}{16}$.

(2) 易知 $\frac{a_{n+2}}{a_n}=\frac{1}{4}$，所以第 n 层树形图的高度为 $a_n=\begin{cases}\frac{1}{2^{n-1}}, & 当 n 为奇数时,\\ \frac{1}{2^{n-1}}\times\frac{\sqrt{2}}{2}, & 当 n 为偶数时.\end{cases}$

所以，当 n 为奇数时，第 n 层树形图的高度为：

$$H_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}}\right]}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]}{1-\frac{1}{4}}$$

$$=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right]+\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right];$$

当 n 为偶数时，第 n 层树形图的高度为：

$$H_n=\frac{1\times\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\frac{1}{4}}+\frac{\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\left[1-\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}}\right]}{1-\frac{1}{4}}$$



$$=\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]+\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right].$$

(3) 不存在.

由(2)知,当 n 为奇数时,

$$H_n<\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]+\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\right\}=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}<2$$

当 n 为偶数时,$H_n<\lim\limits_{n\to\infty}\left\{\frac{4}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]+\frac{\sqrt{2}}{3}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\right]\right\}=\frac{4}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}<2$

由定义可知,此树形图永远是"矮小"的.所以不存在 $m\in\mathbf{Z}$,使得当 $n>m$ 时,该树形图是"高大"的

说明 探索型问题历来是高考与竞赛的命题热点,备受关注,并且由于探索型本身需要调用各方面的能力,因此是考查分析问题、解决问题能力最好的题型之一.探索型问题的解题策略,从方法上讲,可以用由因导果的综合法,或左右归上的两头凑,也可用归纳判断或类比迁移等.从思维方式上讲,侧重类比、发散、迁移与分析.从解题技巧上看,关键在于对问题类型的判断、分解与转化,将综合型问题分解成一系列简单问题.

例 10 (*2007 年广西省高二数学竞赛初赛试题*)已知数列$\{a_n\}$通项 $a_n=n$,其前 n 项和为 S_n,若 S_n 为完全平方数,求 n.

解 依题意得:$S_n=\frac{n(n+1)}{2}=y^2$,即$(2n+1)^2-8y^2=1(n,y\in\mathbf{N}^*)$.于是,问题转化为求方程 $x^2-8y^2=1$ 的整数解.

显然,(3,1)是方程 $x^2-8y^2=1$ 的一组整数解.因为 $x^2-8y^2=(x+\sqrt{8}y)(x-\sqrt{8}y)$,于是构造 $x+\sqrt{8}y=(3+\sqrt{8})^m$,$m\in\mathbf{N}^*$,则 $x-\sqrt{8}y=(3-\sqrt{8})^m$,所以,$x=\frac{1}{2}[(3+\sqrt{8})^m+(3-\sqrt{8})^m]$,即 $2n+1=\frac{1}{2}[(3+\sqrt{8})^m+(3-\sqrt{8})^m]$.所以,$n=\frac{1}{4}[(1+\sqrt{2})^{2m}+(\sqrt{2}-1)^{2m}-2]$,$m\in\mathbf{N}^*$.

另外:问题转化为求贝尔方程 $x^2-8y^2=1$ 的整数解.于是,构造 $x+\sqrt{8}y=(3+\sqrt{8})^m$,$m\in\mathbf{N}^*$,则 $x-\sqrt{8}y=(3-\sqrt{8})^m$,所以,$x=\frac{1}{2}[(3+\sqrt{8})^m+(3-\sqrt{8})^m]$,即 $2n+1=\frac{1}{2}[(3+\sqrt{8})^m+(3-\sqrt{8})^m]$,所以,$n=\frac{1}{4}[(1+\sqrt{2})^{2m}+(\sqrt{2}-1)^{2m}-2]$,$m\in\mathbf{N}^*$.

例 11 (*2006 年美国数学奥林匹克第 5 题*)一只兵在数轴上跳动,初始位置在 1,依下述规则进行每一次跳动:如果兵在位置 n 上,那么它可以跳到位置 $n+1$ 或 $n+2^{m_n+1}$,这



是 m_n 是 n 的质因数分解式中2的幂次. 证明：如果 k 是不小于2的正整数，r 是非负整数，那么兵跳到位置 $2^r\cdot k$ 的最小次数大于兵跳到位置 2^r 的最少次数.

证明 对每一个从1跳到 $2^r\cdot k$ 的数列，都可构造出一个长度小于它的从1跳到 2^r 的数列，从而得到原题的证明.

为此，设 $x_0(=1),x_1,\cdots,x_t(=2^r\cdot k)$ 是一个兵从1跳到 $2^r\cdot k$ 的位置数列，记 $s_j=x_j-x_{j-1}$，则 s_j 是第 j 次跳动的长度，现在定义数列 $\{y_j\}_{j=0}^{t}$ 如下

$$y_0=1,\ y_j=\begin{cases}y_{j-1}+s_j, & y_{j-1}+s_j\leqslant 2^r,\\ y_{j-1}, & y_{j-1}+s_j>2^r.\end{cases}$$

注意，第二种情况是指将跳动 s_j 从原来数列中的跳动去掉. 我们证明：由数列 $\{y_j\}$ 中不同的数恰好可构成一个从1到 2^r 的跳动数列.

事实上，由 y_j 的定义可知，对 $0\leqslant j\leqslant t$，都有 $y_j\leqslant 2^r$. 对固定的 j，设 r' 是满足 $2^r-2^{r'+1}<y_j\leqslant 2^r-2^{r'}$ 的非负整数，则在 y_j 之前被删去的每次跳动的长度都大于 $2^{r'}$，这表明 $x_j\equiv y_j\pmod{2^{r'+1}}$. 现在，如果 $y_{j+1}>y_j$，那么，若 $s_{j+1}=1$，则依规则可作一次跳动从 y_j 跳到 y_{j+1}；若 $s_{j+1}=2^{m+1}$，这里 m 为 x_j 的质因数分解式中2的幂次. 则由 $s_{j+1}+y_j\leqslant 2^r$，知 $2^m<s_{j+1}\leqslant 2^{r'}$，结合 $y_j\equiv x_j\pmod{2^{r'+1}}$ 知 y_j 的质因数分解式中2的幂次也为 m. 因此，可作从 y_j 到 y_{j+1} 的跳动. 所以，第二种情况结论成立.

进一步，在前面讨论中，取 $j=t$ 同余式显示 $y_t\equiv x_t\equiv 0\pmod{2^{r'+1}}$，这与 $2^r-2^{r'+1}<y_t\leqslant 2^r-2^{r'}$ 是矛盾的，所以 $y_t=2^r$. 从而第二种情况决定的数列以 2^r 为结束位置. 最后，由于 $2^r<2^r\cdot k$，因此至少从 $\{x_j\}$ 中去掉了一次跳动. 命题获证.

例12 给定正整数 n 和正数 M，对于满足条件的 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 的所有等差数列 $a_1,a_2,\cdots$，试求 $S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}$ 的最大值.

解法1 设公差为 d，$a_{n+1}=b$，则 $a_1=b-nd$，且

$$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=(n+1)b+\frac{n(n+1)}{2}d,$$

从而，
$$b+\frac{nd}{2}=\frac{S}{n+1}.$$

则 $M\geqslant a_1^2+a_{n+1}^2=(b-nd)^2+b^2=\frac{4}{10}\left(b+\frac{nd}{2}\right)^2+\frac{1}{10}(4b-3nd)^2\geqslant\frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2$

因此 $|S|\leqslant\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$，且当 $b=\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}$，$d=\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{M}$ 时，

$$S=(n+1)\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}+\frac{n}{2}\cdot\frac{4}{\sqrt{10}}\cdot\frac{1}{n}\sqrt{M}\right)=\frac{\sqrt{10}}{2}(n+1)\sqrt{M}$$



由于此时 $4b=3nd$，故 $a_1^2+a_{n+1}^2=\frac{4}{10}\left(\frac{S}{n+1}\right)^2=\frac{4}{10}\cdot\frac{10}{4}M=M$，故 S 的最大值为 $\frac{1}{2}(n+1)\sqrt{10M}$

解法 2 注意到 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$ 及 $S=(n+1)a_{n+1}+\frac{n(n+1)}{2}d$（$d$ 是公差），

有 $a_1^2+(a_1+nd)^2\leqslant M$，及 $d=\frac{2}{3n}\left(\frac{S}{n+1}-a_1\right)$，

从而 $$a_1^2+\left[a_1+\frac{2}{3}\left(\frac{S}{n+1}-a_1\right)\right]^2\leqslant M,$$

即 $$\frac{10}{9}a_1^2+\frac{4S}{9(n+1)}a_1+\frac{4S^2}{9(n+1)^2}-M\leqslant 0.$$

设函数 $f(x)=\frac{10}{9}x^2+\frac{4S}{9(n+1)}x+\frac{4S^2}{9(n+1)^2}-M$，则由 $f(x)\leqslant 0$ 得 $\Delta\geqslant 0$，

即 $$\left[\frac{4S}{9(n+1)}\right]^2\geqslant 4\cdot\frac{10}{9}\cdot\left[\frac{4S^2}{9(n+1)^2}-M\right].$$

从而 $S\leqslant\frac{(n+1)\sqrt{10M}}{2}$. 当 $\Delta=0$，即 $a_1=-\frac{\sqrt{10M}}{10}$，$d=\frac{2\sqrt{10M}}{5n}$ 时，

$$S_{\max}=\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}.$$

解法 3 由题设知

$$S=a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n+1}=\frac{(n+1)(a_{n+1}+a_{2n+1})}{2}=\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1).$$

构造如下向量：

$\boldsymbol{m}=(a_{n+1},a_1)$，$\boldsymbol{n}=(3,-1)$，则 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}=3a_{n+1}-a_1$，$|\boldsymbol{m}|=\sqrt{a_{n+1}^2+a_1^2}$，$|\boldsymbol{n}|=\sqrt{10}$

注意到 $\boldsymbol{m}\cdot\boldsymbol{n}\leqslant|\boldsymbol{m}|\cdot|\boldsymbol{n}|$，则 $3a_{n+1}-a_1\leqslant\sqrt{10(a_1^2+a_{n+1}^2)}$，

从而 $$S\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{10(a_1^2+a_{n+1}^2)}\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}.$$

当且仅当 $\boldsymbol{m}$ 与 $\boldsymbol{n}$ 同向且 $a_1^2+a_{n+1}^2=M$ 时等号成立.

由 $\frac{a_{n+1}}{3}=\frac{a_1}{-1}>0$，$a_1^2+a_{n+1}^2=M$，得 $a_1=-\frac{\sqrt{10M}}{10}$，$d=\frac{2\sqrt{10M}}{5n}$.

此时 $$S_{\max}=\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}.$$



解法 4 题设 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$，设 $a_1=\sqrt{R}\cos\theta, a_{n+1}=\sqrt{R}\sin\theta$，其中 $0\leqslant R\leqslant M, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$，

$$\text{则}\quad S=\frac{n+1}{2}(a_{n+1}+a_{2n+1})=\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)$$

$$=\frac{n+1}{2}(3\sqrt{R}\sin\theta-\sqrt{R}\cos\theta)=\frac{(n+1)\sqrt{10R}}{2}\sin(\theta-\varphi),$$

其中 $\sin\varphi=\frac{1}{\sqrt{10}}, \cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}$，故 $S\leqslant\frac{(n+1)}{2}\sqrt{10M}$，当且仅当 $\sin(\theta-\varphi)=1$ 且 $R=M$ 时，等号成立。

此时，$\sin\theta=\cos\varphi=\frac{3}{\sqrt{10}}, \cos\theta=-\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt{10}}$，即 $a_{n+1}=\frac{3}{\sqrt{10}}\sqrt{M}$，$a_1=-\frac{1}{\sqrt{10}}\sqrt{M}, S_{\max}=\frac{(n+1)\sqrt{10M}}{2}$.

解法 5 设公差为 d，则 $S=\frac{n+1}{2}(3a_{n+1}-a_1)$.

由于 $a_1^2+a_{n+1}^2\leqslant M$，

所以 $10(a_1^2+a_{n+1}^2)=(3a_{n+1}-a_1)^2+(3a_1+a_{n+1})^2\leqslant 10M$，

从而 $S\leqslant\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}$，即 S 的最大值为 $\frac{n+1}{2}\sqrt{10M}$，在 $a_1=-\sqrt{\frac{M}{10}}, a_{n+1}=3\sqrt{\frac{M}{10}}$ 时取到.

例 13 （第 3 届中国东南地区数学奥林匹克试题）一副纸牌共 52 张，其中"方块"、"梅花"、"红心"、"黑桃"每种花色的牌各 13 张，标号依次是 2，3，…，10，J，Q，K，A，其中相同的花色，相邻标号的两张牌称为"同花顺牌"，并且 A 与 2 也算是顺牌（即 A 可以当成 1 使用）. 试确定，从这副牌中取出 13 张牌，使每种标号的牌都出现，并且不含"同花顺牌"的取牌方法数.

解 先一般化为下述问题：设 $n\geqslant 3$，从 $A=(a_1,a_2,\cdots,a_n)$，$B=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$，$C=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$，$D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$ 这 4 个数列中选取 n 个项，且满足：

(1) $1,2,\cdots,n$ 每个下标题都出现；

(2) 下标相邻的任两项不在同一个数列中（下标 n 与 1 视为相邻），其选取方法数记为 x_n，今确定 x_n 的表达式：将一个圆盘分成 n 个扇形格，顺次编号为 $1,2,\cdots,n$，如图 6－11 所示，并将数列 A、B、C、D 各染一种颜色，对于任一个选项方案，如果下标为 i 的项取自某颜

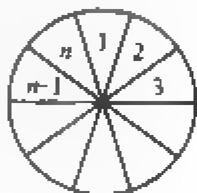


图 6－11



色数列，则将第 r 号扇形格染上该颜色.

于是，x_n 就成为将圆盘的 n 个扇形格染 4 色，使相邻格不同色的染色方法数，易知，$x_1=4$，$x_2=12$，$x_n+x_{n-1}=4\cdot3^{n-1}(n\geqslant3)$ (1)

将(1)式写作 $(-1)^n x_n-(-1)^{n-1}x_{n-1}=-4\cdot(-3)^{n-1}$，

因此， $(-1)^{n-1}x_{n-1}-(-1)^{n-2}x_{n-2}=-4\cdot(-3)^{n-2}$；

…

$$(-1)^3x_3-(-1)^2x_2=-4\cdot(-3)^2；(-1)^2x_2=-4\cdot(-3).$$

上面诸式相加得，$(-1)^n x_n=(-3)^n+3$，于是，$x_n=3^n+3\cdot(-1)^n$，$(n\geqslant2)$.

因此 $x_5=3^5-3$，这就是所求的取牌方法数.

说明 问题可推广为：将圆分为 $n(n\geqslant2)$ 个扇形，有 m 种不同颜色可供选择，每个扇形用 m 种不同颜色之一染色，要求有公共边的扇形所染的颜色不同，问有多少种染色方法？

设有 a_n 种方法，将扇形按顺时针编号 $1,2,\cdots,n$，从 1 开始依次对扇形染色，使得除 1 和 n 外，有公共边的扇形不同色，得到 $m(m-1)^{n-1}$ 种不同的染色方法. 当 1 和 n 不同色，有 a_n 种；1 和 n 同色，有 a_{n-1} 种. 因此，$a_n+a_{n-1}=m(m-1)^{n-1}$，不难求得 $a_n=(m-1)(-1)^n+(m-1)^n$.

据此，可解决以下一系列类似问题：

(1) 在一个正 6 边形的六个区域栽种观赏植物(如图 6-12 所示)，要求同一块区域中种同一种植物，相邻的两块区域种不同的植物，现有 4 种不同植物可供选择，则有________种栽种方案.

(令 $n=6$，$m=4$，则栽种方案有 $(m-1)(-1)^n+(m-1)^n=(4-1)(-1)^6+(4-1)^6=3+729=732$(种))

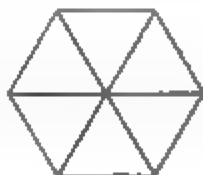


图 6-12

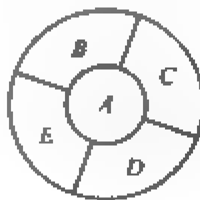


图 6-13

(2) 某市(A)有 4 个相邻县(B，C，D，E)，如图 6-13 所示，现有 5 种颜色，问有多少种不同的涂色方式可使示意图上相邻两块的颜色不同(每块只涂一种颜色)？

(以 5 种颜色中选出 1 种涂 A，有 5 种方法，剩下 B，C，D，E 4 个县和 4 个颜色. 令 $n=4$，$m=4$，则不同的涂色方法有 $(m-1)(-1)^n+(m-1)^n=3+81=84$(种)，故不



同的涂色方式共有 $5\times 84=420$(种))

(3) 某城市在中心广场建造一个花园，花园分 6 个部分(如图 6-14所示)，现要栽种 4 种不同颜色的花，每部分栽种一种且相邻部分不能栽种同样颜色的花，不同的栽种方法有________种。

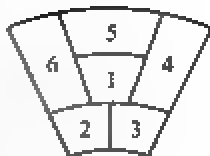


图 6-14

(从 4 种花中选出 1 种栽种在 1 处，有 4 种方法，剩下 5 个部分和 3 种花，令 $n=5$，$m=3$，则这 5 个部分栽种方法有 $(m-1)(-1)^n+(m-1)^n=-2+32=30$(种)，故不同的栽种方法有 $4\times 30=120$(种))

例 14 已知 $n^2(n\geqslant 4)$ 个正数，排成 $n\times n$ 矩阵

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

其中每一行的数成等差数列，每一列的数成等比数列，并且所有的公比都相等，且满足 $a_{24}=1$，$a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，求 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$ 的值.

分析 欲求和 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}$，关键是求数列$\{a_{kk}\}$的通项公式，而 a_{kk} 为一般化问题，较抽象，如果能退一步，将行(或列)具体化、特殊化，由条件 $a_{42}=\frac{1}{8}$，$a_{43}=\frac{3}{16}$，可先求 a_{4k} 的值，再求 a_{kk} 的值.

解 a_{42}，a_{43}，a_{44} 成等差数列，则 $2a_{43}=a_{42}+a_{44}$，可得 $a_{44}=\frac{1}{4}$ 且 $d=a_{43}-a_{42}=\frac{1}{16}$

因为每一列的数成等比数列，所以 $a_{44}=a_{24}\cdot q^2$，又 $a_{24}=1$，故 $q^2=\frac{1}{4}$ 因各数都是正数，所以 $q>0$，可得 $q=\frac{1}{2}$ 由第 4 行的数成等差数列得 $a_{4k}=a_{42}+(k-2)d=\frac{k}{16}$，又第 k 列的数成等比数列，所以 $a_{kk}=a_{4k}\cdot q^{k-4}=\frac{k}{16}\cdot(\frac{1}{2})^{k-4}=k\cdot(\frac{1}{2})^k(k=1,2,\cdots,n)$.

记 $a_{11}+a_{22}+a_{33}+\cdots+a_{nn}=S_n$，由错位相减法可得 $S_n=2-\frac{n+2}{2^n}$

说明 华罗庚说过："善于'退'，足够地'退'，'退'到最原始，而不失去重要性的地方，是学好数学的诀窍."本例从表面上看难于解决，退步考虑，研究特殊现象，再运用分析归纳、迁移、演绎等手法化一般为特殊，概括出一般规律，使问题获解.

例 15 (1990 年全国高中数学联合竞赛试题)已知 a，b 均为正整数，且 $a>b$，$\sin\theta=$



$\frac{2ab}{a^2+b^2}$，其中 $0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$A_n=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$，求证：对一切正整数 n，A_n 均为整数.

证明　由 $\sin\theta=\frac{2ab}{a^2+b^2}$，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$，$a$、$b$ 为正整数，且 $a>b$，有 $\cos\theta=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$，于是，知 $(a^2+b^2)\sin\theta$，$(a^2+b^2)\cos\theta$ 均为整数.

设 $z=(a^2+b^2)\cos\theta+i(a^2+b^2)\sin\theta$，则，$z^n=(a^2+b^2)^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)$.

又由二项式定理知 $[(a^2+b^2)\cos\theta+i(a^2+b^2)\sin\theta]^n=x+yi$（其中 x，y 均为整数），故 $y=(a^2+b^2)^n\sin n\theta$ 对任何正整数 n 均为整数.

说明　本题是在实数范围内所给的问题，往往在复数范围解更有利. 从思维的方向上讲，要做到"进、退"并举，两者不可偏废，使之达到对问题的思考能够"退、进"自如，否则，不是"退"无路，就是"进"无径，甚至"进退"两难

例 16　给定两组数 x_1，x_2，…，x_n 和 y_1，y_2，…，y_n 已知

① $x_1>x_2>\cdots>x_n>0$，$y_1>y_2>\cdots>y_n>0$；

② $x_1>y_1$，$x_1+x_2>y_1+y_2$，…，$x_1+x_2+\cdots+x_n>y_1+y_2+\cdots+y_n$. 证明：对于任何正整数 k，都有如下的不等式成立：

$$x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k>y_1^k+y_2^k+\cdots+y_n^k.$$

证明　先证如果有一个不增的数组 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n\geqslant 0$，且题目中的所有条件全部满足，则有 $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n\geqslant a_1y_1+a_2y_2+\cdots+a_ny_n$.

事实上，存在这样的非负数 b_1，…，b_n，使得 $a_n=b_1$，$a_{n-1}=b_1+b_2$，…，$a_2=\sum\limits_{i=1}^{n-1}b_i$，$a_1=\sum\limits_{i=1}^{n}b_i$，于是就有

$$\begin{aligned}a_1x_1+\cdots+a_nx_n&=\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i\Big)x_1+\Big(\sum_{i=1}^{n-1}b_i\Big)x_2+\cdots+b_1x_n\\&=b_1\Big(\sum_{i=1}^{n}x_i\Big)+b_2\Big(\sum_{i=1}^{n-1}x_i\Big)+\cdots+b_nx_1\\&\geqslant b_1\Big(\sum_{i=1}^{n}y_i\Big)+\cdots+b_ny_1=\Big(\sum_{i=1}^{n}b_i\Big)y_1+\cdots+b_1y_n=a_1y_1+\cdots+a_ny_n.\end{aligned}$$

下面将这个已证得的结果运用 k 次：

(1) 令 $a_i=x_i^{k-1}$，$1\leqslant i\leqslant n$，即有 $x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\geqslant x_1^{k-1}y_1+\cdots+x_n^{k-1}y_n$.

(2) 令 $a_i=x_i^{k-2}y_i$，可得 $x_1^{k-1}y_1+\cdots+x_n^{k-1}y_n\geqslant x_1^{k-2}y_1^2+\cdots+x_n^{k-2}y_n^2$.

(3) 令 $a_i=x_i^{k-3}y_i^2$，可得 $x_1^{k-2}y_1^2+\cdots+x_n^{k-2}y_n^2\geqslant x_1^{k-3}y_1^3+\cdots+x_n^{k-3}y_n^3$

…

(k) 最后，令 $a_i=y_i^{k-1}$，$1\leqslant i\leqslant n$，得到 $x_1y_1^{k-1}+\cdots+x_ny_n^{k-1}\geqslant y_1^k+\cdots+y_n^k$



将上述 k 个不等式连成一串就得到所要证明的结论：$\sum_{i=1}^{k} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k} y_i^2$.

能力训练

1. 已知 $\triangle ABC$ 内有2005个点，其中任意三点不共线，把这2005个点加上 $\triangle ABC$ 的三个顶点，共2008个点作为顶点，组成互不相叠的小三角形，则一共可组成小三角形的个数为 （　　）

A. 2004　　B. 2009　　C. 4011　　D. 4013

2. (2005年重庆市高考文科卷第10题)一塔形几何体由若干个正方体构成，构成方式如图6－15所示，上层正方体下底面的四个顶点是下层正方体上底面各边的中点．已知最底层正方体的棱长为2，且该塔形的表面积(含最底层正方体的底面面积)超过39，则该塔形中正方体的个数至少是 （　　）

A. 4　　B. 5

C. 6　　D. 7

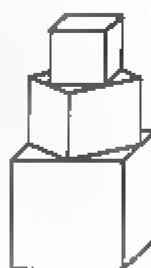


图6－15

3. 如图6－16所示，一种跳格游戏，某人从格外只能进入第1格，在格中每次可向前跳1格或2格，那么从格外跳到第8格的方法种数为 （　　）



1	2	3	4	5	6	7	8

图6－16

A. 21　　B. 26　　C. 17　　D. 13

4. (2007年浙江省高中数学竞赛A卷试题) $\left.2007^{2007^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2007}}}}}\right\}k$ 重的末二位数字是 （　　）

A. 01　　B. 07　　C. 43　　D. 49

5. (2006年杭州市高考模拟题)已知数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_1=\frac{1}{7}$，$a_{n+1}=\frac{7}{2}a_n(1-a_n)$，则对任意正偶数 n，$a_{n+1}-a_n=\frac{3}{7}$ 的概率等于 （　　）

A. 1　　B. $\frac{1}{2}$

C. $\frac{n+1}{2n}$　　D. $\frac{n-1}{2n}$



6.（第9届“希望杯”高二竞赛题）过球的中心的10个平面中的任何三个平面都不交于同一直线，它们将球面分成 m 部分，则 m 的值是（　　）

A. 92　　　　B. 1024

C. 516　　　　D. 100

7.（2004年北京市高考理科卷第14题）定义“等和数列”：在一个数列中，如果每一项与它的后一项的和都为同一个常数，那么这个数列叫做等和数列，这个常数叫做该数列的公和. 已知数列 $\{a_n\}$ 是等和数列，且 $a_1=2$，公和为5，那么 a_{18} 的值为________，这个数列的前 n 项和 S_n 的计算公式为________.

8. 将正整数从1开始依次按如图6-17所示的规律排成一个数阵，其中，2在第1个拐角处，3在第2个拐角处，5在第3个拐角处，7在第4个拐角处，…. 那么，在第2007个拐角处的数是________.

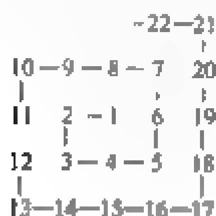
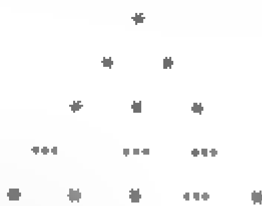


图6-17


图6-18

9.（2005年辽宁省高中数学竞赛题）如图6-18所示，$\frac{n(n+1)}{2}(n\geqslant 2)$ 个不同的数随机排列成一个三角数阵，设 M_k 是从上往下数第 k 行中的最大数，则 $M_1<M_2<\cdots<M_n$ 的概率是________.

10. 如图6-19所示，一个粒子在第一象限及坐标轴上运动，在第1秒内它从原点运动到(0,1)，然后，它接着按图6-19所示在 x 轴、y 轴的平行方向来回运动（即 $(0,0)\to(0,1)\to(1,1)\to(1,0)\to(2,0)\to\cdots$），且每秒移动一个单位长度，那么，在第2005秒时，这个粒子所处的位置为________.

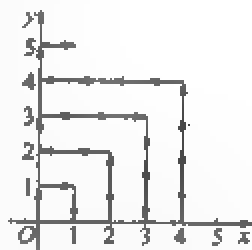


图6-19

11.（2005年河北省高中数学竞赛题）A，B，C，D 是一个正四面体的4个顶点，每条棱长为1m. 一只壁虎从点 A 出发沿着各棱爬行，并遵循下列规则：在每条棱的中途不改变方向，当爬行到每个顶点处时，它在相交于该顶点的三条棱中任选一条继续爬行的可能性相同. 则该壁虎爬行7m，回到顶点 A 的概率为________.

12. 满足 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_m=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}(m,n\in\mathbf{N}^*)$ 的有序集合组 $(A_1,A_2,A_3,\cdots,A_m)$ 共有________个.

13. 定义一个无穷项"数列"$\{a_n\}$：$a_1=0$，$a_2=01$，$a_3=010$，…，将任一项中的0变为01，1变为0，则得到下一项. 记$a_1a_2=001$，$a_2a_1=010$，…，a_ka_{k+1}表示将a_k，a_{k+1}中数字0，1按出现的先后顺序排成一行所得.

(1) 试写出a_4，a_5；

(2) 归纳出a_{k+1}，a_k，a_{k-1}的关系(不需证明)；

(3) 记b_k分别为a_k中0的个数，求证：$\left\{b_{n+1}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}b_n\right\}$是等比数列.

14. (2007年江苏省中学数学奥林匹克夏令营试题) 如果一个十进制正整数含有偶数(包括零)个数字8，则称它为"优数"，否则称为"非优数"，那么长度(位数)不超过$n(n\in\mathbf{N}^*)$的所有"优数"的个数有________.

15. 甲、乙两人轮流掷一枚质地均匀的正方体骰子，规定：如果某人某一次掷出1点，则下一次继续由此人掷，如果掷出其他点数，则由另一人来掷，且第一次由甲掷. 设第n次由甲掷的概率为p_n，由乙掷的概率为q_n.

(1) 计算p_2、p_3的值；

(2) 求证：$\{p_n-q_n\}$是等比数列；

(3) 求$\lim\limits_{n\to\infty}p_n$.

16. (第23届美国数学奥林匹克试题) 一个99边形的边初始时依次着色为红、蓝、红、蓝、…、红、蓝、黄(每条边着一色). 然后进行如下操作：每次可改换一条边的颜色，但必须保持相邻的边都不同色. 问是否可能将边染为红、蓝、红、蓝、…、红、黄、蓝?

17. 从给定的四个整数a_1，b_1，c_1，d_1出发，对一切$n\in\mathbf{N}$，定义

$$a_{n+1}=|a_n-b_n|,\ b_{n+1}=|b_n-c_n|,\ c_{n+1}=|c_n-d_n|,\ d_{n+1}=|d_n-a_n|.$$

求证：存在$k\in\mathbf{N}$，使得$a_k=b_k=c_k=d_k=0$.

18. (1) 甲、乙、丙三人练习传球，从甲开始，则第5次仍传给甲的传球方法共有多少种?

(2) 将上述问题推广：包含甲在内的$m(m\geqslant 2)$个人练习传球，设传球n次，球首先从甲手中传出，第n次仍传给甲，共有多少种不同的传球方法?

为解决上述问题，设传球n次，第n次传给甲的传球方法种数为a_n；设传球n次，第n次不传给甲的传球方法种数为b_n.

① 求a_1，a_2，b_1，并从排列、组合的角度给出$a_{n+1}=b_n$的合理解释；

② 给出$a_n+b_n=(m-1)^n$的合理解释；

③ 设$c_n=\frac{a_n}{(m-1)^n}$，试证：$\left\{c_n-\frac{1}{m}\right\}$为等比数列；

④ 求a_n，并用(1)的结果加以验证.

19. 已知正数数列$\{a_n\}$的前n项和$S_n=\frac{a_n^2+a_n}{2}$，$b_n=\left(1+\frac{1}{2a_n}\right)^{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$



(1) 求数列$\{a_n\}$的通项公式；

(2) 定理：若函数$f(x)$在区间D上是凹函数，且$f'(x)$存在，则当$x_1>x_2(x_1,x_2\in D)$时，总有$\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}<f'(x_1)$.

请根据上述定理，且已知函数$y=x^{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$是$(0,+\infty)$上的凹函数，判断$b_n$与$b_{n+1}$的大小；

(3) 求证：$\dfrac{3}{2}\leqslant b_n<2$.





参考答案

第1讲　递推定义

1. A　当 $2007 < n \leqslant 2009$ 时，$n-4 \leqslant 2005 < 2007$，$n-2 \leqslant 2007$，反复利用 $n \leqslant 2007$ 时 $f(n)=n+2$ 递推，得

$$f(n)=f[f(n-4)]=f(n-4+2)=f(n-2)=(n-2)+2=n,$$

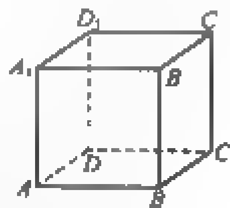
即 $n-f(n)=0$，选 A

2. B　按题设规则，黑、白蚁行进路线如下：

如图，白蚁 $AA_1 \to A_1D_1 \to D_1C_1 \to C_1C \to CB \to BA$，以下循环，黑蚁 $AB \to BB_1 \to B_1C_1 \to C_1D_1 \to D_1D \to DA$，以下循环

也就是每走完6段回到 A 点，再重复行进，而 $1990=331\times 6+4$，

可知当走完第1990段时，白蚁在 C 点，黑蚁在 D_1 点，$CD_1=\sqrt{2}$。



第2题图

3. B　设正方形 G_n 内的整点个数为 a_n，显然 $a_1=5$，当 n 增加到 $n+1$ 时，第一象限内（包括 x 轴的正半轴）增加的整点有 $(1,n)$，$(2,n-1)$，$(3,n-2)$，…，$(n,1)$，$(n+1,0)$，共 $n+1$ 个，由对称性知，正方形 G_n 内共增加 $4(n+1)$ 个整点，由此得递推关系式 $a_1=5$，$a_{n+1}=a_n+4(n+1)$，故 $a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+\cdots+(a_n-a_{n-1})=5+4(2+3+\cdots+n)=2n^2+2n+1$

4. A　$a_1-a_2 \geqslant 2(a_2-a_3) \geqslant 2^2(a_3-a_4) \geqslant \cdots \geqslant 2^{99}(a_{100}-a_1) \geqslant 2^{100}(a_1-a_2)$，$a_1>a_2$ 时，$1 \geqslant 2^{100}$ 矛盾，$a_2>a_1$ 时，$a_2<a_3<\cdots<a_{100}$，$a_{100}-a_1>0$ 与 $a_{99}-a_{100} \geqslant 2(a_{100}-a_1)$ 矛盾，故 $a_1=a_2=\cdots=a_{100}$

5. C　由 $R_n=\frac{1}{2}[(3+2\sqrt{2})^n+(3-2\sqrt{2})^n]$，易得递推式：$R_n=6R_{n-1}-R_{n-2}$ $(n=2,3,\cdots)$，由此求得 R_0 的个位数是1，R_1 的个位数是3，R_2 的个位数是7，R_3 的个位数是9，R_4 的个位数是7，R_5 的个位数是3，R_6 的个位数是1，R_7 的个位数是3，R_8 的个位数是7

由此可猜测 R_{n+6} 与 R_n 的个位数相同（证明略），即个位数字以6为周期重复出现

因为 $R_{2005}=R_{6\times 334+1}$，所以，$R_{2005}$ 的个位与 R_1 的个位相同，都是3，故选 C

说明　本题从特殊情形入手，通过特殊引路，探索规律，猜想得到一个周期，再给予证明，这是处理



这类问题的一般方法

6. B　第1次染红1个数1,$1=1^2$;第2次染红2个数2,4,$4=2^2$;第3次染红3个数5,7,9,$9=3^2$;… 易知,第k次染红的最后一个数为k^2,则第$k+1$次染红的$k+1$个数依次为$k^2+1,k^2+3,\cdots,k^2+2k-1,k^2+2k+1$,其中最后一个数是$(k+1)^2$。按照这个规律,前$k$段共染红了$1+2+3+\cdots+(k-1)+k=\frac{k(k+1)}{2}$个数.解不等式$\frac{k(k+1)}{2}\leqslant 2007$,得$k\leqslant 62$.此时前62个片断共$\frac{62\times 63}{2}=1953$个数,其中第62段最后一个数为$62^2=3844$,也就是第1953个红数是3844.从而,第2007个红数应在第63段中,且第63段中的数全为奇数.而$2007-1953=54$,所以第2007个红数是$3844+1+(54-1)\times 2=3951$.

7. a_k-a_{k-1},为阿贝尔恒等式

8. 最小8次.第1次复制前有$1+2+3+\cdots+10+10=65$个圆,其中空心圆有10个;

第1次复制后有130个圆,其中空心圆有20个;

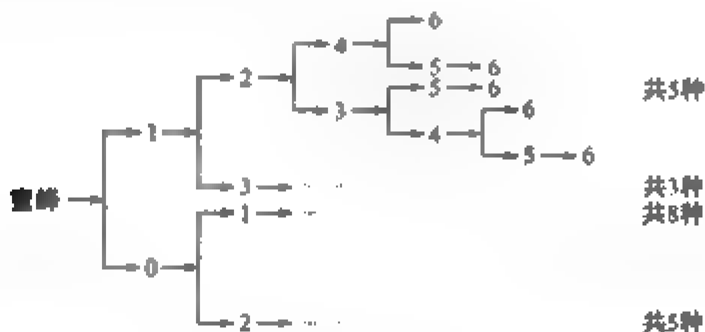
第2次复制后有260个圆,其中空心圆有40个;

…

第n次复制后有$130\times 2^{n-1}$个圆,其中空心圆有$20\times 2^{n-1}$个.

要使$20\times 2^{n-1}\geqslant 2008$,则$2^{n-1}\geqslant 100$,所以$n\geqslant 8$.

9. 21种.利用树状图递推求解.



第9题图

从上图可知共有21种不同的爬法.

10. $a_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot n+\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot 2^{\frac{n}{2}}$.从表面看似乎简单,然而由于第6项为8,使问题复杂化,因此必须超越思维定势的影响,不妨换一个角度,将数列分解考察,不难发现:由奇数项和偶数项构成的两个子数列

$$1,3,5,7,\cdots$$

$$2,4,8,\cdots$$

的通项公式都是已知,且

$$a_n=\begin{cases}n, & \text{当}n\text{是奇数},\\ 2^{\frac{n}{2}}, & \text{当}n\text{是偶数}.\end{cases}$$



于是 $a_n = \frac{1-(-1)^n}{2}\cdot n + \frac{1+(-1)^n}{2}\cdot 2^{\frac{n}{2}}$.

说明 构造子数列求数列通项是常用方法. 概言之,数列$\{a_n\}$的奇数项和偶数项构成的两个子数列分别为$\{b_k\}$和$\{c_k\}$($b_k = a_{2k-1}$, $c_k = a_{2k}$),且它们的通项公式容易求得,$b_k = f(k)$, $c_k = g(k)$,那么 $a_n = \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{n+1}{2}\right)+g\left(\frac{n}{2}\right)\right]+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{n+1}{2}\right)-g\left(\frac{n}{2}\right)\right]$.

11. 6,36 第k天发出的奖牌数显然与第$k-1$天发出的奖牌数有关,故可通过建立递推关系来求解.

设k天后剩下a_k个奖牌,则第k天发出的奖牌数为$k+\frac{1}{7}(a_{k-1}-k)$.所以

$$a_k = a_{k-1} - \left[k+\frac{1}{7}(a_{k-1}-k)\right], a_{k-1} = k+\frac{7}{6}a_k.$$

由题意,知 $m - a_1 = 1 + \frac{1\times(m-1)}{7}$,即

$$\begin{aligned} m &= 1+\frac{7}{6}a_1 = 1+\frac{7}{6}\left(2+\frac{7}{6}a_2\right) \\ &= \cdots \\ &= 1+2\cdot\frac{7}{6}+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{7}{6}\right)^n\cdot a_n. \end{aligned}$$

因为 $a_n = 0$,所以 $m = 1+2\cdot\frac{7}{6}+3\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^2+\cdots+n\cdot\left(\frac{7}{6}\right)^{n-1} = \frac{7^n(n-6)}{6^{n-1}}+36$.

因为 $m\in \mathbf{N}$,所以 $n=6$, $m=36$.

12. 2007. 由题设,$a_{n+2}\geqslant a_n+2$,则

$$a_{2007}\geqslant a_{2005}+2\geqslant a_{2003}+2\times 2\geqslant\cdots\geqslant a_1+2\times 1003 = 2007.$$

由 $a_{n+2}\geqslant a_n+2$,得 $a_n\leqslant a_{n+2}-2$,则

$$a_{n+3}\leqslant a_n+3\leqslant a_{n+2}-2+3 = a_{n+2}+1 (n\geqslant 1).$$

于是

$$\begin{aligned} a_{2007} &\leqslant a_{2006}+1\leqslant a_{2005}+1\times 2 \\ &\leqslant a_{2002}+3+1\times 2 \\ &\leqslant a_{1999}+3\times 2+1\times 2 \\ &\leqslant\cdots \\ &\leqslant a_1+3\times 668+1\times 2 = 2007. \end{aligned}$$

所以 $a_{2007} = 2007$

易知数列 $a_1=1, a_2=2, \cdots, a_n=n$ 符合本题要求

13. 在原函数方程中令$y=1$,且利用$f(1)=\frac{3}{2}$,得



$$f(x+1)=\left(1+\frac{1}{x+1}\right)f(x)+\left(1+\frac{x}{2}\right)\cdot\frac{3}{2}+x^2+2x$$

整理得 $\quad\dfrac{f(x+1)}{x+2}-\dfrac{f(x)}{x+1}=x+\dfrac{3}{4}.$

令 $x=1,2,\cdots,n-1$ 得

$\dfrac{f(2)}{3}-\dfrac{f(1)}{2}=1+\dfrac{3}{4},\dfrac{f(3)}{4}-\dfrac{f(2)}{3}=2+\dfrac{3}{4},\cdots,\dfrac{f(n)}{n+1}-\dfrac{f(n-1)}{n}=(n-1)+\dfrac{3}{4}$

将上述各式相加，得

$$\frac{f(n)}{n+1}-\frac{f(1)}{2}=\frac{1}{2}(n-1)n+\frac{3}{4}(n-1)=\frac{1}{4}(n-1)(2n+3).$$

以 $f(1)=\dfrac{3}{2}$ 代入后整理得 $f(n)=\dfrac{1}{4}n(n+1)(2n+1)$

故所求函数为 $\qquad f(x)=\dfrac{1}{4}x(x+1)(2x+1)x\in\mathbf{N}^*.$

易检验 $f(x)$ 满足原函数方程.

说明 当 $f(x)$ 是定义在正整数集 $\mathbf{N}^*$（或记为 $\mathbf{Z}^+$）上的函数（实际上是通项为 $a_n=f(n)$ 的数列）时，可根据题中所给函数方程，通过取特殊值得到关于 $f(n)$ 的递推关系，然后根据递推关系求出 $f(n)$

14. (1) 任取方程 $f(x)=x$ 的一个根 x_1，则 $f(x_1)=x_1$，$g(x_1)=x_1$，由 $f^{(n)}(x)$ 的定义易得 $f^{(n)}(x_1)=x_1=g^{(n)}(x_1)$，也即是说方程 $f(x)=x$ 的根为方程 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)$ 的根.

(2) 假设方程 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)$ 有一个根 x_1，满足 $f^{(n)}(x_1)=g^{(n)}(x_1)$，但 $f(x_1)>x_1$（当 $f(x_1)<x_1$ 时同理可证）则 $x_1=g[f(x_1)]>g(x_1)$（因 $f(x)$ 与 $g(x)$ 都为增函数），即 $f(x_1)>x_1>g(x_1)$

由上式并注意到 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同为增函数便有

$$x_1<f(x_1)<f[f(x_1)]=f^{(2)}(x_1)<f^{(3)}(x_1)<\cdots<f^{(n)}(x_1),$$

$$x_1>g(x_1)>g[g(x_1)]=g^{(2)}(x_1)>\cdots>g^{(n)}(x_1),$$

从而有 $\quad f^{(n)}(x_1)>x_1>g^{(n)}(x_1)$

上式与 x_1 为 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)$ 的根矛盾！故方程 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)$ 的根必为 $f(x)=x$ 的根.

综合(1)、(2)可知方程 $f^{(n)}(x)=g^{(n)}(x)$ 与方程 $f(x)=x$ 同解.

说明 利用本题结论，可求解一些复杂的方程. 如，$\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2x-1}-1}-1}=\dfrac{x^2+1}{2}$

此题若采用常规解法，需解一个 16 次方程，这显然是不可取的. 下面用本题结论给出一个简解.

解 记 $f(x)=\sqrt{2x-1}$，则 $f^{-1}(x)=\dfrac{x^2+1}{2}$. 原方程即 $f^{(3)}(x)=f^{-1}(x)$

又易知 $f(x)$ 为增函数，从而上述方程与方程 $f(x)=x$ 同解. 方程 $f(x)=x$ 即 $\sqrt{2x-1}=x$，解之得 $x=1$.

所以原方程的解为 $x=1$.

15. 由于 C 写的两数中，有一个数是任意的，所以开始的信息不足以使 A 知道 b，B 知道 a，既然问题



的结论是最终有人知道对方所写的数，说明在否定回答中为对方提供了新的信息 而显然这种信息只是一种数值界限的估计

不妨设 $x<y$，先证如下结论

(1) 若 A 和 B 均知道 $\lambda<b<\mu$ 且 A 回答不知道，则 A、B 均知道 $y-\mu<a<x-\lambda$.

(2) 若 A 和 B 均知道 $\lambda<a<\mu$ 且 B 回答不知道，则 A、B 均知道 $y-\mu<b<x-\lambda$.

证：(1) 若 A、B 均知道 $\lambda<b<\mu$，且 $a\leqslant y-\mu$，则 $a+b<y-\mu+\mu=y$，所以 $a+b=x$，故 A 知道 b.

若 $b\geqslant x-\lambda$，则 $a+b>\lambda+x-\lambda=x$，所以 $a+b=y$，故 A 知道 b.

因此若 A 回答"不知道"，必有 $y-\mu<a<x-\lambda$. 同理可证(2)

若题目结论不成立 即 A、B 永远回答不知道 开始时，A、B 均知 $0<b<y$

令 $a_0=0$，$b_0=y$，由(1)知 A、B 均知道 $0=y-y<a<x-0=x$，从而由(2)知 A、B 均知道 $y-x<b<x-0$

令 $a_1=y-x$，$b_1=x$，则 $a_1<b<b_1$，如此下去，设 A、B 均知 $a_k<b<b_k$，

则 A、B 均知道 $y-a_k<a<x-a_k$ 从而 A、B 均知 $y-(x-a_k)<b<x-(y-b_k)$ 即，$a_k+(y-x)<b<b_k-(y-x)$.

令 $a_{k+1}=a_k+(y-x)$，$b_{k+1}=b_k-(y-x)$，$k=0,1,2,\cdots$，则 $a_k<b<b_k$.

因为 a_k 递增且 $y-x>0$，b_k 递减且 $y-x>0$，故必存在 $k_0\in\mathbf{N}$，使 $a_{k_0}\geqslant b_{k_0}$，这与 $a_{k_0}<b<b_{k_0}$ 矛盾 故经过有限次提问后，A、B 必有一人知道对方的数字.

第2讲　递推数列

1　递推数列的定义

1. B　由条件可得 $a_{n+1}-a_n=2n$，$(n\geqslant 1)$，$a_n-a_{n-1}=2(n-1)$，…，$a_2-a_1=2$，将它们相加有 $a_n-a_1=2(1+2+\cdots+n-1)=n(n-1)$，故 $a_n=n^2-n+2$，所以 $a_{100}=9902$.

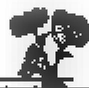
2. B　由 $(a_{n+1}+1)=3(a_n+1)$ 得 $\frac{a_{n+1}+1}{a_n+1}=3$，

故数列 $\{a_n+1\}$ 为公比 $q=3$ 的等比数列，首项为 $a_1+1=1$，所以 $a_n+1=(a_1+1)3^{n-1}=3^{n-1}$，故选 B.

3. B　因为第 n 个圆与前 $n-1$ 个圆有 $2(n-1)$ 个交点，被分成 $2(n-1)$ 段弧，故平面区域将增加 $2(n-1)$ 块，所以 $f(n)-f(n-1)=2(n-1)$，故 $f(n)-f(1)=2(1+2+\cdots+n-1)=n^2-n$，即 $f(n)=n^2-n+2$

4. D　因为 $a_{n+1}=3a_n-2a_{n-1}$，故 $a_{n+1}-2a_n=a_n-2a_{n-1}=\cdots=a_2-2a_1=1$，故 $a_n=2a_{n-1}+1$，所以 $(a_n+1)=2(a_{n-1}+1)$，因此 $a_n+1=(a_1+1)2^{n-1}=2^n$，故 $a_{1000}=2^{1000}-1$

5. D　因为 $a_n=\log_n(n+1)=\frac{\lg(n+1)}{\lg n}$，所以 $a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{1023}=\frac{\lg3}{\lg2}\cdot\frac{\lg4}{\lg3}\cdot\cdots\cdot\frac{\lg1024}{\lg1023}=\frac{\lg1024}{\lg2}$ $=\log_2 1024=10$. 从而，$\sum\limits_{n=2}^{1023}\frac{1}{\log_{a_n}100}=\sum\limits_{n=2}^{1023}\log_{100}a_n=\log_{100}(a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_{1023})=\log_{100}10=\frac{1}{2}$，



即$\dfrac{q}{p}=\dfrac{1}{2}$，又$(p,q)=1$，所以$p=2$，$q=1$，故$p+q=3$.

6. B　由于木材存有量a_n与年数n有关，即$a_n=f(n)$，所以可建立数列模型. 设a_n是n年后林场木材的存有量，则$a_1=\dfrac{5}{4}a-x$且$a_n=\dfrac{5}{4}a_{n-1}-x(n\geqslant 2)$，从而$a_2=\left(\dfrac{5}{4}\right)^2a-\left(\dfrac{5}{4}+1\right)x$，$a_3=\left(\dfrac{5}{4}\right)^3a-\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{5}{4}+1\right]x$，

猜想，$a_n=\left(\dfrac{5}{4}\right)^na-\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-1}+\left(\dfrac{5}{4}\right)^{n-2}+\cdots+\dfrac{5}{4}+1\right]x=\left(\dfrac{5}{4}\right)^na-4\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^n-1\right]x$，

利用数学归纳法可以证明其正确性

根据题设$\left(\dfrac{5}{4}\right)^{20}a-4\left[\left(\dfrac{5}{4}\right)^{20}-1\right]x\geqslant 4a$，设$A=\left(\dfrac{5}{4}\right)^{20}$，由$\lg A=20(1-3\lg 2)\approx 2$得$A=100$.

从而可解得$x\leqslant\dfrac{8}{33}a$，即每年冬天的最大砍伐量为$\dfrac{8}{33}a$

此模型的推广意义在于，很多与资源有关的问题都可考虑按可持续发展问题处理.

7. -16. 因为$a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$，所以$\{a_n\}$是等差数列，$d=a_2-a_1=-\dfrac{1}{6}$

所以，$a_{100}=a_1+99\times\left(-\dfrac{1}{6}\right)=-16$.

8. $a_n=2^n-n(n\geqslant 1)$. 由已知可得，$a_n+n=2(a_{n-1}+n-1)(n\geqslant 2)$，令$b_n=a_n+n$，则$b_1=a_1+1=2$，且$b_n=2b_{n-1}(n\geqslant 2)$，于是$b_n=2\cdot 2^{n-1}=2^n$，即$a_n+n=2^n$，故$a_n=2^n-n(n\geqslant 2)$，因为$a_1=1$也适合这一式子，所以$a_n=2^n-n(n\geqslant 1)$

9. 10，$\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$　设第n堆的底层球数是$g(n)$，由图与题意可得$g(n)-g(n-1)=n$，叠加可得

$$g(n)=g(1)+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2},$$

而$f(n)-f(n-1)=g(n)$，所以

$$\begin{aligned}f(n)&=f(n)-f(n-1)+f(n-1)-f(n-2)+\cdots+f(2)-f(1)+f(1)\\&=\frac{1}{2}(1^2+2^2+\cdots+n^2)+(1+2+\cdots+n)\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{n(n+1)}{2}\right]\\&=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},\end{aligned}$$

所以　$f(3)=10$，$f(n)=\dfrac{n(n+1)(n+2)}{6}$

说明　对于填空题来说，这是一道有难度的试题. 两次用等差数列定义与求和，且有一个是前n个自然数平方的和，但不失为一道好题，与实情相结合，背景也不十分复杂，题目新颖，看似较少见到，但实质就是一个数列题的变形. 只要对题目仔细分析，发现问题，寻找模型，写出前面几项，同时分析特点与



规律，就比较好解决了.这需要具备扎实的基本功、综合分析问题及创造性地解决问题的能力和探索能力.

10. n^2-n+1. 本题提供图形材料，把数字信息隐藏在图形变化发展的规律中，令人耳目一新. (3)～(5)规律性比较强，第 n 个图有 n 个"杈"，每个"杈"有 n 个点，共有 n^2 个点，又 n 个杈共 点，去掉 n，加上 1，所以第 n 个图有 n^2-n+1 个点.

11. $-\frac{1000}{3}$. 由题设，知 $a_2=1-2a_1$，$a_3=2-2a_2$，$a_4=3-2a_3$，…，$a_{2001}=-2000-2a_{2000}$.

将以上 2000 个等式相加，并注意 $a_{2001}=a_1$，便得

$$a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=(1-2+3-4+\cdots-2000)-2(a_1+a_2+\cdots+a_{2000}),$$

所以，$3(a_1+a_2+\cdots+a_{2000})=-1000$，求得 $a_1+a_2+\cdots+a_{2000}=-\frac{1000}{3}$.

12. 4 由题意，得 $a_2=2a_1=\frac{2}{9}$，$a_4=2a_2=\frac{4}{9}$，$a_8=2a_4=\frac{8}{9}$，$a_{16}=2a_8=\frac{16}{9}$，$a_{32}=2a_{16}=\frac{32}{9}$，

$a_{36}=a_{32}+a_4=\frac{36}{9}=4$，因此，填 4.

说明 在 $a_p+a_q=a_{p+q}$ 中，取 $p=q=1$，得 $a_2=2a_1$；取 $p=q=2$，得 $a_4=2a_2$，等等. 这种取特殊值的方法，显示是由一般到特殊的思维方式. 事实上，本题的数列 $\{a_n\}$ 当中，隐含了子数列是等比数列，一般的通项公式可由如下方式求：

令 $q=1$，则 $a_p+a_1=a_{p+1}$，即 $a_{p+1}=a_p+\frac{1}{9}$，所以数列 $\{a_n\}$ 是公差为 $\frac{1}{9}$ 的等差数列，其通项公式为：$a_n=a_1+(n-1)d=\frac{1}{9}+(n-1)\times\frac{1}{9}=\frac{n}{9}$.

检验：当 $a_n=\frac{n}{9}$ 时，$a_p+a_q=\frac{p}{9}+\frac{q}{9}=\frac{p+q}{9}=a_{p+q}$，且 $a_1=\frac{1}{9}$，符合题设条件.

综上，数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n=\frac{n}{9}$.

13. (1) 设 $a_{n+1}+x\cdot5^{n+1}=2(a_n+x\cdot5^n)$， (1)

将 $a_{n+1}=2a_n+3\cdot5^n$ 代入(1)式，得 $2a_n+3\cdot5^n+x\cdot5^{n+1}=2a_n+2x\cdot5^n$，等式两边消去 $2a_n$，得 $3\cdot5^n+x\cdot5^{n+1}=2x\cdot5^n$，两边除以 5^n，得 $3+x\cdot5=2x$，则 $x=-1$，代入(1)式，得

$$a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n). \tag{2}$$

由 $a_1-5^1=6-5=1\neq0$ 及(2)式，得 $a_n-5^n\neq0$，则 $\frac{a_{n+1}-5^{n+1}}{a_n-5^n}=2$，则数列 $\{a_n-5^n\}$ 是以 $a_1-5=1$ 为首项，以 2 为公比的等比数列，则 $a_n-5^n=1\cdot2^{n-1}$，故 $a_n=2^{n-1}+5^n$.

说明 本题解题的关键是把递推关系式 $a_{n+1}=2a_n+3\cdot5^n$ 转化为 $a_{n+1}-5^{n+1}=2(a_n-5^n)$，从而可知数列 $\{a_n-5^n\}$ 是等比数列，进而求出数列通项.

(2) 由 $a_{n+1}=a_n+\frac{8(n+1)}{(2n+1)^2(2n+3)^2}$ 及 $a_1=\frac{8}{9}$，得



$$a_2 = a_1 + \frac{8(1+1)}{(2\cdot1+1)^2(2\cdot1+3)^2} = \frac{8}{9} + \frac{8\cdot2}{9\cdot25} = \frac{24}{25},$$

$$a_3 = a_2 + \frac{8(2+1)}{(2\cdot2+1)^2(2\cdot2+3)^2} = \frac{24}{25} + \frac{8\cdot3}{25\cdot49} = \frac{48}{49},$$

$$a_4 = a_3 + \frac{8(3+1)}{(2\cdot3+1)^2(2\cdot3+3)^2} = \frac{48}{49} + \frac{8\cdot4}{49\cdot81} = \frac{80}{81}$$

由此可猜测 $a_n = \dfrac{(2n+1)^2-1}{(2n+1)^2}$，往下用数学归纳法证明这个结论

① 当 $n=1$ 时，$a_1 = \dfrac{(2\cdot1+1)^2-1}{(2\cdot1+1)^2} = \dfrac{8}{9}$，所以等式成立

② 假设当 $n=k$ 时等式成立，即 $a_k = \dfrac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2}$，则当 $n=k+1$ 时

$$\begin{aligned}
a_{k+1} &= a_k + \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\
&= \frac{(2k+1)^2-1}{(2k+1)^2} + \frac{8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\
&= \frac{[(2k+1)^2-1](2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\
&= \frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+3)^2+8(k+1)}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\
&= \frac{(2k+1)^2(2k+3)^2-(2k+1)^2}{(2k+1)^2(2k+3)^2} \\
&= \frac{(2k+3)^2-1}{(2k+3)^2} = \frac{[2(k+1)+1]^2-1}{[2(k+1)+1]^2}.
\end{aligned}$$

由此可知，当 $n=k+1$ 时等式也成立。根据①，②可知，等式对任何 $n\in\mathbf{N}^*$ 都成立。

(3) 在 $a_{n+2} = \dfrac{2}{3}a_{n+1} + \dfrac{1}{3}a_n$ 两边减去 a_{n+1}，得：$a_{n+2}-a_{n+1} = -\dfrac{1}{3}(a_{n+1}-a_n)$

所以 $\{a_{n+1}-a_n\}$ 是以 $a_2-a_1=1$ 为首项，以 $-\dfrac{1}{3}$ 为公比的等比数列。

所以
$$a_{n+1}-a_n = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}.$$

令上式 $n=1,2,3,\cdots,(n-1)$，再把 $(n-1)$ 个等式累加得

$$\begin{aligned}
a_n - a_1 &= 1 + \left(-\frac{1}{3}\right) + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}}{1+\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].
\end{aligned}$$

所以
$$a_n = 1 + \frac{3}{4}\left[1+\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right].$$



14. 不妨设甲针上由小到大放着 n 片圆薄片，现在要将这些圆薄片按题设规则移到乙针上去.

设完成这个任务至少需要移动 a_n 次，那么当 $n=1$ 时，只要把甲针上的圆薄片直接移到乙针上就可以了，所以，$a_1=1$.

当 $n=2$ 时，需要先将甲针上较小的圆薄片移到丙针上，再将甲针上较大的圆薄片移到乙针上，然后再将丙针上的圆薄片移到乙针上. 因此，$a_2=3$.

当 $n=3$ 时，为了叙述的方便，我们把甲针上的圆薄片编号，最小的为1号，中间的为2号，最大的为3号. 移动的全过程可以按下列程序进行：① 1号圆薄片由甲针移到乙针；② 2号圆薄片由甲针移到丙针；③ 1号圆薄片由乙针移到丙针；④ 3号圆薄片由甲针移到乙针；⑤ 1号圆薄片由丙针移到甲针；⑥ 2号圆薄片由丙针移到乙针；⑦ 1号圆薄片由甲针移到乙针. 这样，$a_3=7$.

通过考察 $n=1,2,3$ 时等特殊情形，我们不难发现，当甲针上有 n 片圆薄片时，必须先把上面的 $n-1$ 片移到丙针上，再把最大的一片移到乙针上，然后又把这 $n-1$ 片移到已放好最大一片的乙针上. 因此，有递推关系

$$a_n=2a_{n-1}+1\ (n\geqslant 2). \tag{1}$$

依不动点法，由递推关系(1)易得 $a_n=2^n-1$，即把 n 片圆薄片从一根针上移动到另一根针上，至少得移动 2^n-1 次.

15. 设播放 k 次广告之后，还剩下 a_k 条广告未播，则第 k 次播出的广告条数为：

$$k+\frac{1}{8}(a_{k-1}-k)=\frac{1}{8}a_{k-1}+\frac{7}{8}k.$$

于是 $a_k=a_{k-1}-\left(\frac{1}{8}a_{k-1}+\frac{7}{8}k\right)=\frac{7}{8}a_{k-1}-\frac{7}{8}k$，故 $a_{k-1}=k+\frac{8}{7}a_k$.

由此递推式，得 $m=a_0=1+\frac{8}{7}a_1=1+\frac{8}{7}\left(2+\frac{8}{7}a_2\right)=1+2\times\frac{8}{7}+\left(\frac{8}{7}\right)^2\cdot a_2$

$$=1+2\times\frac{8}{7}+\left(\frac{8}{7}\right)^2\cdot\left(3+\frac{8}{7}a_3\right)$$

$$=1+2\times\frac{8}{7}+3\times\left(\frac{8}{7}\right)^2+\left(\frac{8}{7}\right)^3\cdot a_3$$

$$=\cdots$$

$$=1+2\times\frac{8}{7}+3\times\left(\frac{8}{7}\right)^2+\cdots+n\times\left(\frac{8}{7}\right)^{n-1}+\left(\frac{8}{7}\right)^n\cdot a_n$$

由 a_n 的定义知，$a_n=0$.

则

$$m=\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{8}{7}\right)^{i-1}, \tag{1}$$

$$\frac{8}{7}m=\sum_{i=1}^{n}i\left(\frac{8}{7}\right)^{i}. \tag{2}$$

由(2)式－(1)式，得

$$\frac{m}{7}=1+\frac{8}{7}+\left(\frac{8}{7}\right)^2+\cdots+\left(\frac{8}{7}\right)^{n-1}-n\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^n$$



$$=\frac{\left(\frac{8}{7}\right)^n-1}{\frac{8}{7}-1}-n\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^n=7\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^n-7-n\cdot\left(\frac{8}{7}\right)^n$$

故
$$m=49+(n-7)\cdot\frac{8^n}{7^{n-1}}$$

对于 $n>1$，显然有 $|n-7|<7^{n-1}$ 又 $(8^n,7^{n-1})=1$，$m\in \mathbf{Z}$，则必有 $n-7=0$. 故 $n=7$，$m=49$

因此，有 7 次播广告时刻，共播了 49 条广告.

16. 记 T_n 为将一个 n 边形的每个顶点染为红、蓝、绿三种颜色之一，使得相邻顶点的颜色互不相同的方法数. 易知 $T_3=6$，$T_4=18$.

对于任意一个 $n(n\geqslant 5)$，记 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 顺次为这个 n 边形的顶点. 则对它按题设要求染色，有两种情况 ① A_1, A_{n-1} 异色，共有 T_{n-1} 种；② A_1, A_{n-1} 同色，共有 $2T_{n-2}$ 种. 所以 $T_n=T_{n-1}+2T_{n-2}(n\geqslant 5)$.

其特征方程为
$$\lambda^2-\lambda-2=0, \lambda_1=2, \lambda_2=-1.$$

令 $T_n=A\cdot 2^n+B(-1)^n$，又 $T_4=18$，$T_3=6$，所以 $A=1$，$B=2$，所以，$T_n=2^n+2(-1)^n$，所以，$T_{2003}=2^{2003}-2$.

另一种解法如下：

仿解 设 A_1 有 3 种染法，A_2 有 2 种染法，…，A_{n-1} 有 2 种染法，A_n 仍有 2 种染法（不论是否与 A_1 同色），这样共有 $3\times 2^{n-1}$ 种染法. 但这 $3\times 2^{n-1}$ 种染法可分为两类：一类是 A_n 与 A_1 同色，认为 A_n 与 A_1 重合，此时染法数有 T_{n-1} 种；另一类是 A_n 与 A_1 不同色，此时染法数有 T_n 种.

所以 $T_n+T_{n-1}=3\times 2^{n-1}(n\geqslant 4)$. 所以 $2\frac{T_n}{2^n}+\frac{T_{n-1}}{2^{n-1}}=3$.

令 $a_n=\frac{T_n}{2^n}(n\geqslant 3)$，所以，$a_n=-\frac{1}{2}a_{n-1}+\frac{3}{2}(n\geqslant 4)$，易得当 $n\geqslant 3$ 时 $a_n=1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

所以，当 $n\geqslant 3$ 时，$T_n=2^n+2(-1)^n$.

17. (1) 设 $f(x)=x^2-a_{n+1}\sin(\cos x)+(2a_n+1)\sin 1$，显然 $f(x)$ 是偶函数

因为关于 x 的方程 $x^2-a_{n+1}\sin(\cos x)+(2a_n+1)\sin 1=0$ 有惟一解，

所以 $x=0$ 是方程 $x^2-a_{n+1}\sin(\cos x)+(2a_n+1)\sin 1=0$ 的惟一解，

所以 $0^2-a_{n+1}\sin(\cos 0)+(2a_n+1)\sin 1=0$，即：$a_{n+1}=2a_n+1$，

所以 $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$，故：$a_n+1=2^{n-1}(a_1+1)=2^n$，

即 $a_n=2^n-1$，$(n\in \mathbf{N}^*)$.

(2)
$$\begin{aligned}S_n&=1\times(2^1-1)+2\times(2^2-1)+\cdots+n\times(2^n-1)\\&=1\times 2^1+2\times 2^2+\cdots+n\times 2^n-(1+2+\cdots+n)\\&=(n-1)\times 2^{n+1}-\frac{n(n+1)}{2}+2.\end{aligned}$$

(3)
$$\begin{aligned}c_n&=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+\cdots+C_n^n\left(\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 2+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&<2+\frac{1}{2^1}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<2+1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}<3.\end{aligned}$$



18. 引进递归思想，我们就可找到简单的方法：设上 n 级台阶的迈步方法有 a_n 种，某人第1步可迈一至三级，第1步迈一级，而后上 $n-1$ 级，有 a_{n-1} 种上法；第1步迈二级，而后上 $n-2$ 级，有 a_{n-2} 种上法；第1步迈三级，而后上 $n-3$ 级，有 a_{n-3} 种上法. 从而得到 $a_n=a_{n-1}+a_{n-2}+a_{n-3}$ 且 $a_1=1, a_2=2, a_3=4$.

有了递推关系，给我们计算这个数列带来一定的方便. 我们可以轻而易举地计算10级台阶的迈步方法数. 若要计算100级台阶的迈步方法数 a_{100} 的值，我们不得不求出从 a_1 到 a_{99} 的全部值. 这时我们迫切地想知道：上楼问题数列的通项是什么？

递推方程：$a_{n+3}-a_{n+2}-a_{n+1}-a_n=0$，其特征方程为：$\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1=0$，三个特征根为：

$$\lambda_1=\frac{1}{3}\left(1+\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right),$$

$$\lambda_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}-\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)i,$$

$$\lambda_3=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\left(\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}+\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}\right)-\frac{\sqrt{3}}{6}\left(\sqrt[3]{19+3\sqrt{33}}-\sqrt[3]{19-3\sqrt{33}}\right)i,$$

$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 互不相同. 因此，设递推方程的通解为：$a_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n+C_3\lambda_3^n$

可由初始条件 $a_1=1, a_2=2, a_3=4$，来确定系数 C_1, C_2, C_3.

$$D=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}\neq 0, D_1=\begin{vmatrix}1 & \lambda_2 & \lambda_3\\ 2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2\\ 4 & \lambda_2^3 & \lambda_3^3\end{vmatrix}, D_2=\begin{vmatrix}\lambda_1 & 1 & \lambda_3\\ \lambda_1^2 & 2 & \lambda_3^2\\ \lambda_1^3 & 4 & \lambda_3^3\end{vmatrix}, D_3=\begin{vmatrix}\lambda_1 & \lambda_2 & 1\\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & 2\\ \lambda_1^3 & \lambda_2^3 & 4\end{vmatrix}$$

取 $C_1=\dfrac{D_1}{D}, C_2=\dfrac{D_2}{D}, C_3=\dfrac{D_3}{D}$，这时可以得到通项公式：$a_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n+C_3\lambda_3^n$.

从通项公式的表达式看出，这是一个实用性很差的"坏公式"，但毕竟有了通项公式.

上楼问题的推广：某楼梯有 $n(n\geqslant 1)$ 级台阶，某人一步最多迈 $m(n\geqslant m\geqslant 1)$ 级，有多少种不同的方案上楼？

设上 n 级台阶的方案有 $f(n)$ 种，则 $f(n)=f(n-1)+f(n-2)+\cdots+f(n-m)$，$(n\geqslant m)$，为了表述方便规定 $f(0)=1$，且有 $f(1)=1, f(2)=2, f(k)=\sum\limits_{i=0}^{k-1}f(i)(k\leqslant m)$.

但推广到一般上楼问题模型，用前面的方法求解其通项公式相当复杂，几乎不可能求出通项公式. 下面用母函数法来解决通项问题.

现在我们来看一般上楼问题的解 $f(n)$，作形式幂级数：

$$F(x)=f(0)+f(1)x+f(2)x^2+\cdots+f(n)x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n.$$

由于有递推关系：$f(n+m)=f(n+m-1)+f(n+m-2)+\cdots+f(n)$

上式两端同乘以 x^{n+m} 并求和：

$$\sum_{n=0}^{\infty}f(n+m)x^{n+m}=x\sum_{n=0}^{\infty}f(n+m-1)x^{n+m-1}+x^2\sum_{n=0}^{\infty}f(n+m-2)x^{n+m-2}+\cdots+x^m\sum_{n=0}^{\infty}f(n)x^n$$

$(1-x-x^2-\cdots-x^m)F(x)=f(0)+(f(1)-f(0))x+(f(2)-f(1)-f(0))x^2+(f(3)-f(2)$



$$=f(1)-f(0))x^2+\cdots+(f(m-1)-f(m-2)-f(m-3)-\cdots-f(1)-f(0))x^{m-1}.$$

又由于 $f(0)=f(1)=1$，$f(2)=2$，$f(k)=\sum_{i=1}^{k-1}f(i)$，从中解出母函数：

$$F(x)=\frac{1}{1-x-x^2-\cdots-x^m}.$$

我们得到一般上楼问题的解 $f(n)$ 就是 $\frac{1}{1-x-x^2-\cdots-x^m}$ 的形式幂级数展开式中 x^n 的系数.函数的展开是有些困难的，表达式也有些复杂，但我们终于得到了通项公式：

$$f(n)=\sum_{i_m=0}^{\left[\frac{n}{m}\right]}\sum_{i_{m-1}=0}^{\left[\frac{n-mi_m}{m-1}\right]}\cdots\sum_{i_2=0}^{\left[\frac{n-mi_m-(m-1)i_{m-1}-\cdots-3i_3}{2}\right]}\frac{(i_2+i_3+\cdots+i_m)!}{i_2!\times i_3!\times\cdots\times i_m!}C_{n-(m-1)i_m-(m-2)i_{m-1}-\cdots-i_2}^{i_2+i_3+\cdots+i_m}$$

据此容易写出原上楼问题的解：$a_n=\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{3}\right]}\sum_{j=0}^{\left[\frac{n-3i}{2}\right]}\frac{(i+j)!}{i!\times j!}\times C_{n-2i-j}^{i+j}$.

2 变系数递推数列

1. $1+\frac{1}{2005!}$ 由题设，得 $(n+1)(x_{n+1}-1)=x_n-1$，$\frac{x_{n+1}-1}{x_n-1}=\frac{1}{n+1}$，

所以 $x_n-1=\frac{x_n-1}{x_{n-1}-1}\cdot\frac{x_{n-1}-1}{x_{n-2}-1}\cdots\frac{x_2-1}{x_1-1}(x_1-1)=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdots\frac{1}{2-1}(2-1)$.

所以，$x_n=\frac{1}{n!}+1$，故，$x_{2005}=1+\frac{1}{2005!}$.

2. $a_n=(n+1)(2^{n+1}-1)$.

提示 由已知条件可得 $\frac{a_n}{n+1}=2\cdot\frac{a_{n-1}}{n}+1(n\geqslant 2)$.

令 $u_n=\frac{a_n}{n+1}$，则 $u_n=2u_{n-1}+1$，即 $u_n+1=2(u_{n-1}+1)(n\geqslant 2)$.

所以，数列 $\{u_n+1\}$ 是一个首项为 u_1+1，公比为 2 的等比数列.

所以 $u_n+1=(u_1+1)\cdot 2^{n-1}$，$u_1=\frac{a_1}{2}=3$.

故 $a_n=(n+1)u_n=(n+1)\cdot[(u_1+1)\cdot 2^{n-1}-1]$

$=(n+1)\cdot(4\cdot 2^{n-1}-1)=(n+1)(2^{n+1}-1)$.

3. $\frac{1}{7}(49n-45)(5n+2)$ 由已知变形得 $\frac{x_n}{5n+2}=\frac{x_{n-1}}{5n-3}+7$，则数列 $\left\{\frac{x_n}{5n+2}\right\}$ 是以 $\frac{x_1}{5n+2}=\frac{4}{7}$ 为首项，7 为公差的等差数列，所以 $\frac{x_n}{3n+2}=\frac{4}{7}+7(n-1)$，即 $x_n=\frac{1}{7}(49n-45)(5n+2)$.

4. $a_n=2n^2-n$. 因为 $(n-1)a_{n+1}=(n+1)(a_n-1)$，

所以 $(n-1)[a_{n+1}-(n+1)]+(n-1)(n+1)=(n+1)(a_n-n)+(n+1)(n-1)$，



即 $(n-1)[a_{n+1}-(n+1)]=(n+1)(a_n-n)$，化简得 $\frac{a_{n+1}-(n+1)}{a_n-n}=\frac{n+1}{n-1}$，

$$a_n-n=\frac{a_n-n}{a_{n-1}-(n-1)}\cdot\frac{a_{n-1}-(n-1)}{a_{n-2}-(n-2)}\cdot\cdots\cdot\frac{a_4-4}{a_3-3}\cdot\frac{a_3-3}{a_2-2}\cdot(a_2-2)$$

$$=\frac{n}{n-2}\cdot\frac{n-1}{n-3}\cdot\frac{n-2}{n-4}\cdot\cdots\cdot\frac{4}{4-2}\cdot\frac{3}{3-2}(6-2)=2n(n-1)，$$

故　$a_n=2n^2-n$.

5. $a_n=\frac{1}{n+1}$　所给递推式两边同除 $(n+2)!$，得

$$\frac{a_{n+2}}{(n+2)!}=2\frac{a_{n+1}}{(n+1)!}-\frac{a_n}{n!}+\frac{n^2+3n+1}{(n+3)!}，\qquad(1)$$

由于　$\frac{n^2+3n+1}{(n+3)!}=\frac{1}{(n+3)!}+\frac{(n+2)-2}{(n+2)!}=\frac{1}{(n+3)!}+\frac{1}{(n+1)!}-\frac{2}{(n+2)!}$，

令 $b_n=\frac{a_n}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}$，则(1)变成 $b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n$，即 $b_{n+2}-b_{n+1}=b_{n+1}-b_n$，说明数列 $\{b_n\}$ 是等差数列，由 $b_1=a_1-\frac{1}{2!}=0$，$b_2=\frac{a_2}{2!}-\frac{1}{3!}=0$，知 $\{b_n\}$ 为常数列 0，0，0，…，

所以　$\frac{a_n}{n!}-\frac{1}{(n+1)!}=0$，$a_n=\frac{1}{n+1}$.

6. 5. 由　$a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，

可得　$a_{n+2}-a_{n+1}=(n+2)a_{n+1}-(n+2)a_n$

$=(n+2)(a_{n+1}-a_n)$

$=(n+2)(n+1)(a_n-a_{n-1})$

$=\cdots$

$=(n+2)\cdot(n+1)\cdot n\cdot(n-1)\cdot\cdots\cdot4\cdot3\cdot(a_2-a_1)=(n+2)!$.

所以　$a_n=a_1+(a_2-a_1)+(a_3-a_2)+(a_4-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n-1})$

$=1!+2!+3!+\cdots+n!(n\geqslant1)$.

由于 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，$a_4=33$，$a_5=153$，并且 $n\geqslant6$ 时 $n!$ 能被 9 整除，所以 n 的最小值为 5.

另一种解法如下：

因为 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$，所以 $a_1=1$，$a_2=3$，$a_3=9$，$a_4=33$，$a_5=153$，$a_6=873$．因为 a_5 与 a_6 都能被 9 整除，所以由递推关系式 $a_{n+2}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$ 可知 a_5 后面的所有项都能被 9 整除，故 n 的最小值为 5.

7. 原方程两边除以 $n+2$，得 $\frac{a_{n+2}}{n+2}-\frac{2a_{n+1}}{n+1}+\frac{a_n}{n}=0$．令 $b_n=\frac{a_n}{n}$，$b_{n+2}-2b_{n+1}+b_n=0$，化成常系数方程，可用特征方程求解.

因为特征方程 $x^2-2x+1=0$，$x_1=x_2=1$，所以 $b_n=A+Bn$．于是原方程的解为：$a_n=Bn^2+An$，其中 A，B 为待定系数.



8. 加强命题，可先用数学归纳法证明：对于任意 $n \in \mathbf{N}^*$，均有 $x_n \leqslant \frac{n}{2}$

当 $n=1$ 时，$x_1 \leqslant \frac{1}{2}$ 成立．假设 $n=k$ 时，$x_k \leqslant \frac{k}{2}$，

则 $n=k+1$ 时，有 $x_{k+1}=x_k+\frac{x_k^2}{k^2} \leqslant \frac{k}{2}+\frac{1}{k^2}\left(\frac{k}{2}\right)^2=\frac{k}{2}+\frac{1}{4}<\frac{k+1}{2}$

综上所述，对一切 $n \in \mathbf{N}^*$，$x_n \leqslant \frac{n}{2}$，所以 $x_{2008} \leqslant 1004$.

注　本题的解法是递推数列中的数值估计问题，求解过程采用特殊与一般相结合的策略．

9. 改写条件式为 $\frac{1}{(n+1)a_{n+1}}-\frac{1}{na_n}=1$，则

$$\frac{1}{na_n}=\left[\frac{1}{na_n}-\frac{1}{(n-1)a_{n-1}}\right]+\left[\frac{1}{(n-1)a_{n-1}}-\frac{1}{(n-2)a_{n-2}}\right]+\cdots+\left(\frac{1}{2a_2}-\frac{1}{a_1}\right)+\frac{1}{a_1}$$

$$=(n-1)+2=n+1,$$

所以

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)},$$

$$x_k=\sum_{i=1}^{k}a_i=\sum_{i=1}^{k}\left(\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1},$$

$$y_k=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{a_i}=\sum_{i=1}^{k}i(i+1)=\sum_{i=1}^{k}i^2+\sum_{i=1}^{k}i$$

$$=\frac{k(k+1)(2k+1)}{6}+\frac{k(k+1)}{2}=\frac{k(k+1)(k+2)}{3}.$$

$$\sum_{k=1}^{n}x_k y_k=\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}k^2(k+2)$$

$$=\frac{1}{3}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+\frac{2}{3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$=\frac{n(n+1)(3n^2+11n+4)}{36}.$$

10. 令 $b_n=na_n$，则题中递推式化为 $b_{n+2}=-b_{n+1}+n^2b_n$．变形后即为：

$$b_{n+2}=[-(n+1)+n]b_{n+1}-(-n)nb_n$$

这是第 2 讲第 2 节知识扫描中式(4)当 $f(n)=-n$，$g(n)=n$ 的特殊情况，由于此时 $g(0)=b_2-f(1)b_1=1$，

$$\prod_{k=1}^{m}\frac{g(k-1)}{f(k)}=\frac{1}{(-1)^m m}=\frac{(-1)^m}{m},$$

所以由第 2 讲第 2 节知识扫描中式(5)式得：$n\geqslant 2$ 时

$$b_n=\prod_{i=1}^{n-1}f(i)\left[\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m}+b_1\right]=(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\prod_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m}-1\right],$$

所以

$$a_n=\frac{b_n}{n}=\frac{1}{n}(-1)^{n-1}(n-1)!\left[\sum_{m=1}^{n-1}\frac{(-1)^m}{m}-1\right]$$

11. 由已知得 $(n+2)a_{n+1}=na_n+2(n+1)^{2r}$，

所以 $$(n+1)(n+2)a_{n+1}=n(n+1)a_n+2(n+1)^{2r+1}.$$

构建新数列 $\{b_n\}$，$b_n=n(n+1)a_n$，则 $b_1=2$，$b_{n+1}-b_n=2(n+1)^{2r+1}$。

所以，$b_n=b_1+\sum\limits_{k=1}^{n-1}(b_{k+1}-b_k)=2(1+2^{2r+1}+3^{2r+1}+\cdots+n^{2r+1})$，所以，$b_n\in \mathbf{N}$

因为 $$b_n=2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}[k^{2r+1}+(n-k)^{2r+1}]$$

$$=2n^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n^{2r+1}-C_{2r+1}^{1}n^{2r}k+C_{2r+1}^{2}n^{2r-1}k^2-\cdots+C_{2r+1}^{2r}n\cdot k^{2r}),$$

所以 $n\mid b_n$

又 $$b_n=\sum_{k=1}^{n}k^{2r+1}+\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)^{2r+1}=\sum_{k=1}^{n}[k^{2r+1}+(n+1-k)^{2r+1}]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}[(n+1)^{2r+1}-C_{2r+1}^{1}(n+1)^{2r}k+C_{2r+1}^{2}(n+1)^{2r-1}k^2-\cdots+C_{2r+1}^{2r}(n+1)k^{2r}],$$

所以 $(n+1)\mid b_n$，所以 $n(n+1)\mid b_n$，从而 $a_n\in \mathbf{N}^*$。

12. 因为 $a_{n+2}=a_{n+1}+n^2a_n$，所以，$a_{n+2}-(n+1)a_{n+1}=-n(a_{n+1}-na_n)$。

令 $b_n=a_{n+1}-na_n$，得 $b_{n+1}=-nb_n$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=-n$。

所以，$b_n=\dfrac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\dfrac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\dfrac{b_2}{b_1}\cdot b_1=(-1)^{n-1}(n-1)!b_1=(-1)^{n-1}(n-1)!$（其中 $b_1=1$）

从而有 $a_{n+1}-na_n=(-1)^{n-1}(n-1)!$，故，$a_{n+1}=na_n+(-1)^{n-1}(n-1)!$。

这是 $a_{n+1}=f(n)a_n+g(n)$ 当 $f(n)=n$，$g(n)=(-1)^{n-1}(n-1)!$ 的特殊情况，可得到

$$a_n=\begin{cases}1, & n=1\\ (n-1)!\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\dfrac{(-1)^{k-1}}{k}+1\right], & n\geqslant 2.\end{cases}$$

说明 由上可以归纳出 对于递归关系

$$a_{n+2}=f(n)a_{n+1}+f(n)f(n-1)g(n-1)\cdot[g(n)-1]a_n,$$

可先变形为 $a_{n+2}-f(n)g(n)a_{n+1}=-[g(n)-1]\cdot f(n)[a_{n+1}-f(n-1)g(n-1)a_n]$，

然后由变换 $b_n=a_{n+1}-f(n-1)g(n-1)a_n$，转化为数列 $b_{n+1}=-[g(n)-1]f(n)b_n$

求出 b_n，再求出其通项公式。

13. 由已知

$$t_1+t_2=p, t_1t_2=q, \tag{1}$$

可化为

$$x_{n+2}=(-1)^n(t_1+t_2)x_{n+1}+t_1t_2x_n \tag{2}$$

由此可得



$$x_{n+2}+(-1)^{n+1}t_1x_{n+1}=(-1)^n t_2\left[x_{n+1}+t_1(-1)^n x_n\right] \tag{3}$$

令 $b_n=x_{n+1}+(-1)^n t_1x_n$，则(3)式可化为 $b_{n+1}=(-1)^n t_2 b_n$

所以 $b_n=\frac{b_n}{b_{n-1}}\cdot\frac{b_{n-1}}{b_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{b_2}{b_1}\cdot b_1=(-1)^{n-1}\cdot(-1)^{n-2}\cdot\cdots\cdot(-1)^1 t_2^{n-1}(x_2-t_1x_1)$

所以 $$x_{n+1}+(-1)^n t_1x_n=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}t_2^{n-1}(x_2-t_1x_1) \tag{4}$$

因(2)式中 t_1,t_2 地位相同，故由(2)式，又可得

$$x_{n+1}+(-1)^n t_2x_n=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}t_1^{n-1}(x_2-t_2x_1) \tag{5}$$

(5)式－(4)式，得 $(-1)^n(t_2-t_1)x_n=(-1)^{\frac{(n-1)n}{2}}\left[t_1^{n-1}(x_2-t_2x_1)-t_2^{n-1}(x_2-t_1x_1)\right]$

当 $t_1\neq t_2$ 时，即可得到 $x_n=\frac{\sigma(n)}{t_1-t_2}\left[t_1^{n-1}(x_2-t_2x_1)-t_2^{n-1}(x_2-t_1x_1)\right]$

当 $t_1=t_2=t$ 时，由(4)式得

$$x_{n+1}+(-1)^n tx_n=\sigma(n)t^{n-1}(x_2-tx_1) \tag{6}$$

(6)式两边同除 $\delta(n)t^{n-1}$，得 $\frac{x_{n+1}}{\delta(n)t^{n-1}}-\frac{x_n}{\delta(n)t^{n-2}}=x_2-tx_1$，此式说明 $\left\{\frac{x_n}{\delta(n)t^{n-2}}\right\}$ 是等差数列，所以 $\frac{x_n}{\delta(n)t^{n-2}}=\frac{x_1}{(-1)^0t^{1-2}}+(n-1)(x_2-tx_1)$ 即，$x_n=\delta(n)t^{n-2}\left[(n-1)x_2-(n-2)tx_1\right]$。

说明 应用此结论可以解决另一类非线性递归数列问题，比如 $x_{n+2}x_n+x_{n+1}^2=a\cdot b^n$，且 $x_n\neq0$，则数列 $\{x_n\}$ 亦满足 $x_{n+2}=(-1)^n\frac{x_2-bx_1}{x_1}x_{n+1}+bx_n$。因此可应用上面结论来求通项公式。

14．将递推关系式变形成 $\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{a_n}+\left(\frac{n+1}{n}\right)$ 作辅助数列 $\{b_n\}$，设 $b_n=\frac{1}{a_n}$，得 $b_{n+1}=\frac{1}{n}b_n+\frac{n+1}{n}$。

这是一阶变系数线性递推数列当 $f(n)=\frac{1}{n}$，$g(n)=\frac{n+1}{n}$ 时的特殊情况，故可得

$$b_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \frac{1}{(n-1)!}\left[\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)!}{k}+1\right], & n\geqslant 2,\end{cases}$$ 所以，$$a_n=\frac{1}{b_n}=\begin{cases}1, & n=1,\\ \frac{(n-1)!}{\sum\limits_{k=1}^{n-1}\frac{(k+1)!}{k}+1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

说明 由递推式 $a_{n+1}=f(n)a_n/[g(n)a_n+h(n)]$ 给出数列 $\{a_n\}$，对递推关系取倒数，得

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{h(n)}{f(n)}\cdot\frac{1}{a_n}+\frac{g(n)}{f(n)}$$

令 $b_n=\frac{1}{a_n}$，即可转化为一阶变系数线性递推数列，求出其通项

15．(1) 由 $a_{n+1}=\frac{a_n}{2^na_n+1}$ 得：$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{1}{a_n}+2^n$，

所以 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n-1}}=2^{n-1}$，$\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_{n-2}}=2^{n-2}$，…，$\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}=2$，



相加得 $\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_1}=2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}$，即，$\frac{1}{a_n}=1+2^1+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$，

所以
$$a_n=\frac{1}{2^n-1}(n\in N^*)$$

(2)
$$\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{k^2+k}a_k=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=1-\frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2^k-1}{k^2+k}a_k=\lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})=1$$

(3) 因为 $a_n=\frac{1}{2^n-1}$，所以 $\frac{(2^n-1)(1+n)^n}{n^n}a_n=(1+\frac{1}{n})^n$.

$$(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}$$
$$=1+1+C_n^2\frac{1}{n^2}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}\geqslant 2.$$

又 $(1+\frac{1}{n})^n=1+C_n^1\frac{1}{n}+C_n^2\frac{1}{n^2}+C_n^3\frac{1}{n^3}+\cdots+C_n^n\frac{1}{n^n}$

$$=1+1+\frac{n(n-1)}{2!n^2}+\frac{n(n-1)(n-2)}{3!n^3}+\cdots+\frac{n(n-1)\cdots2\times1}{n!n^n}$$
$$\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}=3-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

所以
$$2\leqslant\frac{(2^n-1)(1+n)^n}{n^n}a_n<3.$$

16. 令 $a_3\geqslant a_2$，即 $a_1+\frac{2}{a_1+\frac{1}{a_1}}\geqslant a_1+\frac{1}{a_1}$，解得 $a_1\geqslant 1$. 这是数列单调递增的必要条件. 下面证明 $a_1\geqslant 1$ 也是数列单调递增的充分条件.

由 $a_n\leqslant a_{n+1}$，得 $a_n\leqslant a_1+\frac{n}{a_n}$，于是，$a_n^2-a_1a_n-n\leqslant 0$，解得 $a_n\leqslant\frac{a_1}{2}+\sqrt{n+\frac{a_1^2}{4}}$．又由 $a_{n-1}\leqslant a_n$ 得 $\frac{n-1}{-a_1+a_n}\leqslant a_n$，即 $a_n^2-a_1a_n-(n-1)\geqslant 0$，解得 $a_n\geqslant\frac{a_1}{2}+\sqrt{n-1+\frac{a_1^2}{4}}$．据此分析，我们要用数学归纳法来证明：当 $a_1\geqslant 1$ 时，有不等式

$$\frac{a_1}{2}+\sqrt{n-1+\frac{a_1^2}{4}}\leqslant a_n\leqslant\frac{a_1}{2}+\sqrt{n+\frac{a_1^2}{4}} \quad (1)$$

由(1)式即知 $a_{n+1}\geqslant a_n$ 对 $n=1,2,\cdots$ 都成立. 下面设 $a_1\geqslant 1$，显然不等式(1)对 $n=1$ 成立. 假设(1)式对 $n=k(k\geqslant 1)$ 时成立，要证明(1)式对 $n=k+1$ 时也成立. 先证(1)式的左边的不等式.

因为
$$a_{k+1}=a_1+\frac{k}{a_k}\geqslant a_1+\frac{k}{\frac{a_1}{2}+\sqrt{k+\frac{a_1^2}{4}}}=\frac{a_1}{2}+\sqrt{k+\frac{a_1^2}{4}},$$

即(1)式左边不等式对 $n=k+1$ 也成立.



下面证明右边的不等式.

因为 $a_{k+1}=a_k+\frac{k}{a_k}\leqslant a_k+\frac{k}{\frac{a_1}{2}+\sqrt{k+\frac{a_1^2}{4}}}$，所以只要证明

$$a_1+\frac{k}{\frac{a_1}{2}+\sqrt{k-1+\frac{a_1^2}{4}}}\leqslant\frac{a_1}{2}+\sqrt{k+1+\frac{a_1^2}{4}}.\tag{2}$$

(2) 式的两边同时乘以 $\frac{a_1}{2}+\sqrt{k-1+\frac{a_1^2}{4}}$，并整理配方得

$$\left(\sqrt{k+1+\frac{a_1^2}{4}}-\sqrt{k-1+\frac{a_1^2}{4}}\right)^2\leqslant a_1\left(\sqrt{k+1+\frac{a_1^2}{4}}-\sqrt{k-1+\frac{a_1^2}{4}}\right)$$

约去公因式(大于零)，得 $\sqrt{k+1+\frac{a_1^2}{4}}\leqslant a_1+\sqrt{k-1+\frac{a_1^2}{4}}$

上式两边同时平方，化简得 $2\leqslant a_1^2+2a_1\sqrt{k-1+\frac{a_1^2}{4}}$.

因为 $a_1\geqslant 1$，且 $k\geqslant 1$，所以上式成立. 故对 $n=k+1$ 时，(1) 式右边不等式也成立

由归纳原理知，当 $a_1\geqslant 1$ 时，(1) 式对任意正整数 n 都成立，即 $a_n\leqslant a_{n+1}$ 对任意正整数 n 成立，因此当且仅当 $a_1\geqslant 1$ 时，数列才是单调递增的

3 非线性递推数列

1. B 在递推式中令 $n=2$，得 $a_2=a_1+\frac{(-1)^2}{a_1}$，即 $a_2=2$.

再令 $n=3$，$a_3=a_2+\frac{(-1)^3}{a_2}=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$，取 $n=4$，得 $a_4=a_3+\frac{(-1)^4}{a_3}=\frac{3}{2}+\frac{2}{3}=\frac{13}{6}$.

所以 $\frac{a_4}{a_2}=\frac{\frac{13}{6}}{2}=\frac{13}{12}$，选 B.

2. D 由观察 $a_1, a_2, a_3\cdots$，可推知 D 正确.

3. C 由题设，方程 $\frac{x}{a(x+2)}=x$ 有惟一解，即方程

$$x\left[\frac{1}{a(x+2)}-1\right]=0\tag{1}$$

有惟一解，解(1)式得 $x_1=0$，$x_2=\frac{1-2a}{a}$. 因 $\frac{1-2a}{a}=-2$ 无解，所以由 $x_1=x_2=0$，得 $a=\frac{1}{2}$.

所以，$f(x)=\frac{2x}{x+2}$，$x_n=\frac{1}{f(\frac{1}{x_{n-1}})}=\frac{1}{\frac{2\cdot\frac{1}{x_{n-1}}}{\frac{1}{x_{n-1}}+2}}=\frac{2x_{n-1}+1}{2}=x_{n-1}+\frac{1}{2}$.



所以 $x_n - x_{n-1} = \frac{1}{2}$,所以,$x_n = x_1 + \frac{1}{2}(n-1)$,$x_{2009} = 1000 + 2008 \times \frac{1}{2} = 2004$

4. D　易知第 k 行由 k 个实数对 (i, j) 组成,其中 $\{i\}$ 由数列 1, 2, …, k 构成,$\{j\}$ 由数列 k, $k-1$, …, 1 构成,且 $i+j=k+1$. 前 k 行点对总数 $1+2+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$,由 $\frac{k(k+1)}{2}\geq 100$,知 k 的最小值为 14. 由于前 13 行点对总数为 $\frac{13\times 14}{2}=91$,第 100 个数对是该数表的第 14 行的第 9 个数. 因此,应该是 (9,6).

5. B　由递推式得 $a_{n+1} = (\sqrt{a_n} + \frac{1}{2})^2$,即 $\sqrt{a_{n+1}} = \sqrt{a_n} + \frac{1}{2}$. 故 $\{\sqrt{a_n}\}$ 为等差数列,从而有 $\sqrt{a_n} = \sqrt{a_1} + (n-1)\times\frac{1}{2} = \frac{n+1}{2}$,所以 $a_{99} = \left(\frac{99+1}{2}\right)^2 = 2500$,选 B.

6. B　这是非线性的递推关系 $\left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right)^2 = 10\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}$

令 $b_n = \frac{a_n}{a_{n-1}}$,则又可写为 $b_n^2 = 10b_{n-1}$,$b_n = (10b_{n-1})^{\frac{1}{2}}$. 由该递推关系可得

$$
\begin{aligned}
b_n &= (10b_{n-1})^{\frac{1}{2}} = 10^{\frac{1}{2}}(10b_{n-2})^{\frac{1}{4}} = 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}(b_{n-2})^{\frac{1}{4}} \\
&= 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}(10b_{n-3})^{\frac{1}{8}} = 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}(b_{n-3})^{\frac{1}{8}} \\
&= \cdots \\
&= 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}(b_2)^{\frac{1}{2^{n-2}}} = 10^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}}\left(\frac{a_2}{a_1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}} \\
&= 10^{1-\frac{1}{2^{n-2}}} \cdot 10^{\frac{1}{2^{n-2}}} = 10.
\end{aligned}
$$

由此得 $a_n = 10a_{n-1}$,即 a_n 是一个等比数列. 于是,$a_n = 10a_{n-1} = 10^2a_{n-2} = \cdots = 10^{n-1}a_1 = 10^{n-1}$,所以 $a_{100} = 10^{99}$,$\lg a_{100} = 99$. 选 B.

7. $\frac{1}{5986}$. 观察相邻两项 a_{n+1} 与 a_n 的关系,发现:为了求 a_n,可转化为先求 $\frac{1}{a_n}$

因为 $a_{n+1} = \frac{a_n}{3a_n+1}$ 且 $a_9 = \frac{1}{7}$,所以 $\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{3a_n+1}{a_n} = \frac{1}{a_n} + 3$,即 $\frac{1}{a_{n+1}} - \frac{1}{a_n} = 3$ 为常数

这说明数列 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$ 是公差为 3 的等差数列. 由通项公式的变式 $a_n = a_m + (n-m)d$,知

$$\frac{1}{a_{2002}} = \frac{1}{a_9} + (2002-9)\cdot 3 = 7 + 5979 = 5986,$$

所以 $a_{2002} = \frac{1}{5986}$.

8. $\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}$. 由 $0 < a < 1$,可设 $a_1 = a = \sin\theta\ (0 < \theta < \frac{\pi}{2})$,

$$a_2 = \sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\theta}}{2}} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \sin\frac{\theta}{2},$$

$$a_3=\sqrt{\frac{1-\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta}{2}}}{2}}=\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\theta}{2}}{2}}=\sin\frac{\theta}{4},$$

以此类推 $a_n=\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}$.

9. $4n^2$. $a_{n+1}^2+a_n^2+16=8(a_{n+1}+a_n)+2a_{n+1}a_n$

$\Leftrightarrow (a_{n+1}+a_n)^2-8(a_{n+1}+a_n)+16=4a_{n+1}a_n$

$\Leftrightarrow (a_{n+1}+a_n-4)^2=4a_{n+1}a_n$

$\Leftrightarrow a_{n+1}+a_n-4=2\sqrt{a_{n+1}a_n}$(由题意可知取正号.)

$\Leftrightarrow (\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})^2=4$

$\Leftrightarrow \sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=2$

因此，$\{\sqrt{a_n}\}$ 是公差为 2 的等差数列，即 $\sqrt{a_n}=2n$. 从而可得 $a_n=4n^2$.

10. 3. 由 $x_{k^2+1}=x_{k^2+2}=\cdots=x_{(k+1)^2}=2k+1$，即当 $k^2+1\leqslant n\leqslant(k+1)^2$ 时，$x_n=2k+1$，$k=\left[\sqrt{n-1}\right]$，所以 $x_n=2\left[\sqrt{n-1}\right]+1$. 于是，$(a,b,c,d)=(2,1,-1,1)$，$a+b+c+d=3$

11. 933. 由 $a_{n+2}=a_n-\frac{2}{a_{n+1}}$ 得 $a_{n+1}a_{n+2}=a_{n+1}a_n-2$. 在出现 0 项前，数列 $\{a_{n+1}a_n\}$ 是等差数列.

$a_{n+1}a_n=a_2a_1+(n-1)(-2)=2(932-n)$. 所以当 $n=932$ 时，$a_{933}a_{932}=0$，但由于 $a_{932}a_{931}=2$，所以 $a_{933}=0$，当 $m\geqslant 933$ 时，都有 $a_m=0$. 所以 m 的最小值为 933.

12. $x_n=\frac{6}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$. 原递推式取倒数得 $\frac{1}{x_n}=\frac{2}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}}(n\geqslant 3)$，即

$$\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}}=\cdots=\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

所以 $\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}}=\frac{1}{6}(n\geqslant 2)$.

于是 $\frac{1}{x_n}=(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n-1}})+(\frac{1}{x_{n-1}}-\frac{1}{x_{n-2}})+\cdots+(\frac{1}{x_2}-\frac{1}{x_1})+\frac{1}{x_1}$

$=\frac{1}{x_1}+\frac{1}{6}\cdot(n-1)$

$=\frac{1}{3}+\frac{n-1}{6}=\frac{n+1}{6}$.

从而 $x_n=\frac{6}{n+1}(n\in\mathbf{N}^*)$

13. (1) 由 $b_n=\frac{1}{a_n-\frac{1}{2}}$ 得 $a_n=\frac{1}{b_n}+\frac{1}{2}$，代入 $8a_{n+1}a_n-16a_{n+1}+2a_n+5=0$，并整理得

$$\frac{4}{b_{n+1}b_n}-\frac{6}{b_{n+1}}+\frac{3}{b_n}=0,$$



即 $$b_{n+1} = 2b_n - \frac{4}{3}. \qquad (1)$$

由 $a_1 = 1$ 得 $b_1 = 2$. 由(1)式可求得 $b_2 = \frac{8}{3}, b_3 = 4, b_4 = \frac{20}{3}$

(2) 由(1)式得 $b_{n+1} - \frac{4}{3} = 2\left(b_n - \frac{4}{3}\right)$，而 $b_1 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \neq 0$，所以 $\left\{b_n - \frac{4}{3}\right\}$ 是首项为 $\frac{2}{3}$，公比为 2 的等比数列，于是 $b_n - \frac{4}{3} = \frac{2}{3} \times 2^{n-1}$，即 $b_n = \frac{1}{3} \times 2^n + \frac{4}{3} (n \geqslant 1)$.

由 $b_n = \frac{1}{a_n - \frac{1}{2}}$ 得，$a_n b_n = \frac{1}{2} b_n + 1$，

所以
$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{2}(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) + n \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3} + \frac{2^2}{3} + \cdots + \frac{2^n}{3} + \frac{4n}{3}\right) + n \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2 \times (1 - 2^n)}{1 - 2} + \frac{5n}{3} \\ &= \frac{1}{3}(2^n + 5n - 1) \end{aligned}$$

14. 由条件得
$$\begin{aligned} x_6 &= x_5(x_4 + x_3) = x_4(x_4 + x_3)(x_3 + x_2) \\ &= (x_4 + x_3)(x_3 + x_2)(x_2 + x_1)x_3 \\ &= x_3^2(x_3 + x_2)(x_2 + x_1)(x_2 + x_1 + 1) \\ &= 2^4 \times 3^2. \end{aligned}$$

由于 $x_3^2(x_3 + x_2) \geqslant 2$，从而 $(x_2 + x_1)(x_2 + x_1 + 1) \leqslant 8 \times 9$，可知 $2 \leqslant x_2 + x_1 \leqslant 8$. 又 $x_2 + x_1$ 为 144 的约数，所以 $x_2 + x_1$ 只能等于 2，3 或 8.

情形 1：$x_1 + x_2 = 2$，则 $x_1 = x_2 = 1$，这时 $x_3^2(1 + x_3) = 24 = 2^3 \times 3$. 易知 x_3 只能为 1 或 2，但此时均有 $x_3^2(1 + x_3) \neq 24$，故 $x_1 + x_2 = 2$ 时，无解.

情形 2：$x_1 + x_2 = 3$，这时 $x_3^2(x_3 + x_2) = 2^2 \times 3$，经过讨论可知仅当 $x_3 = 2, x_2 = 1, x_1 = 2$ 时成立. 这时，可知 $x_7 = 3456$.

情形 3：$x_1 + x_2 = 8$，则 $x_3^2(x_3 + x_2) = 2$，而 $x_3 + x_2 \geqslant 2$，故 $x_3 = 1, x_2 = 1, x_1 = 7$ 由此亦可知 $x_7 = 3456$.

综上可知，$x_7 = 3456$.

15. 因为 $a_{n+1} = \left[(3a_n)^n + 6^n - 2^{n+1}\right]^{\frac{1}{n+1}}$，

所以 $$a_{n+1}^{n+1} + 2^{n+1} = 3^n(a_n^n + 2^n) \qquad (1)$$

因为 $a_1 \geqslant 0$，所以 $a_1^1 + 2^1 > 0$，从而由(1)式可知 $a_n^n + 2^n > 0$，则 $\frac{a_{n+1}^{n+1} + 2^{n+1}}{a_n^n + 2^n} = 3^n$，

故由累乘法得



$$a_n^2+2^n=\frac{a_n^2+2^n}{a_{n-1}^2+2^{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}^2+2^{n-1}}{a_{n-2}^2+2^{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3^2+2^3}{a_2^2+2^2}\cdot\frac{a_2^2+2^2}{a_1^2+2^1}\cdot(a_1^2+2^1)$$

$$=3^{n-1}\cdot3^{n-2}\cdot\cdots\cdot3^2\cdot3^1\cdot(a_1+2)=3^{\frac{n(n-1)}{2}}\cdot(a_1+2),$$

即 $$a_n^2=(a_1+2)\cdot3^{\frac{n(n-1)}{2}}-2^n.$$

故数列$\{a_n\}$的通项公式为 $$a_n=\left[(a_1+2)\cdot3^{\frac{n(n-1)}{2}}-2^n\right]^{\frac{1}{2}}.$$

16. 由 $b_n=\frac{b_{n-1}^2+2}{b_{n-2}}(n\geqslant3)$ 得

$$b_nb_{n-2}=b_{n-1}^2+2 \quad (1)$$

则 $$b_{n+1}b_{n-1}=b_n^2+2 \quad (2)$$

(2)式－(1)式得 $b_{n+1}b_{n-1}-b_nb_{n-2}=b_n^2-b_{n-1}^2$ 所以 $\frac{b_{n+1}+b_{n-1}}{b_n}=\frac{b_n+b_{n-2}}{b_{n-1}}$

于是 $$\frac{b_n+b_{n-2}}{b_{n-1}}=\frac{b_{n-1}+b_{n-3}}{b_{n-2}}=\cdots=\frac{b_3+b_1}{b_2}=4$$

即 $b_n=4b_{n-1}-b_{n-2}(n\geqslant3)$，从而易得，$a_n=b_n(n\geqslant3)$

由 $c_{n+1}=2c_n+\sqrt{3c_n^2-2}(n\geqslant3)$ 得 $(c_{n+1}-2c_n)^2=3c_n^2-2$.

即 $$c_{n+1}^2-4c_{n+1}c_n+c_n^2+2=0 \quad (3)$$

则 $$c_n^2-4c_nc_{n-1}+c_{n-1}^2+2=0. \quad (4)$$

(3)式－(4)式，并因式分解得 $(c_{n+1}-c_{n-1})(c_{n+1}-4c_n+c_{n-1})=0$.

由递推公式易知$\{c_n\}$递增，因此 $c_{n+1}>c_{n-1}$，于是 $c_{n+1}-4c_n+c_{n-1}=0(n\geqslant2)$，则 $c_n=4c_{n-1}-c_{n-2}$ $(n\geqslant3)$. 又 $a_1=c_1$，$a_2=c_2$，所以 $a_n=c_n(n\geqslant3)$.

综上所述，对一切 $n\in\mathbf{N}^*$，都有 $a_n=b_n=c_n$.

说明　本题初看上去比较复杂，同时出现了3个数列，但证明起来并不难，只要对$\{b_n\}$和$\{c_n\}$的递推关系进行变形即可．这说明，一些貌似完全不同的递推关系，其内涵却可能是完全一致的.

17. 令 $b_n=\sqrt{1+24a_n}$，则 $a_n=\frac{1}{24}(b_n^2-1)$，故 $a_{n+1}=\frac{1}{24}(b_{n+1}^2-1)$，代入 $a_{n+1}=\frac{1}{16}(1+4a_n+\sqrt{1+24a_n})$ 得 $\frac{1}{24}(b_{n+1}^2-1)=\frac{1}{16}\left[1+4\cdot\frac{1}{24}(b_n^2-1)+b_n\right]$，即 $4b_{n+1}^2=(b_n+3)^2$

因为 $b_n=\sqrt{1+24a_n}\geqslant0$，故 $b_{n+1}=\sqrt{1+24a_{n+1}}\geqslant0$，则 $2b_{n+1}=b_n+3$，即 $b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{3}{2}$，可化为 $b_{n+1}-3=\frac{1}{2}(b_n-3)$，所以$\{b_n-3\}$是以 $b_1-3=\sqrt{1+24a_1}-3=\sqrt{1+24\cdot1}-3=2$ 为首项，以$\frac{1}{2}$为公比的等比数列，因此 $b_n-3=2\cdot(\frac{1}{2})^{n-1}=(\frac{1}{2})^{n-2}$，则 $b_n=(\frac{1}{2})^{n-2}+3$，即 $\sqrt{1+24a_n}=(\frac{1}{2})^{n-2}+3$，得 $a_n=\frac{2}{3}(\frac{1}{4})^n+(\frac{1}{2})^n+\frac{1}{3}$.

18. (1) 从数列角度来看，语句(4)("$x=x+3$")可以理解为 $x_{n+1}=x_n+3$(其中 $n\in\mathbf{N}^*$)，语句



(6)("$x=4x$")可以理解为 $x_{n+1}=4x_n$(其中,$n\in \mathbf{N}$),语句(2)~(6)是一个小循环,执行的程序是

$$x_{n+1}=\begin{cases}x_n+3, & n=2k-1,\\ 4x_n, & n=2k,\end{cases}\quad k\in \mathbf{N}.$$

同理语句(2)~(9)是一个大循环,其终止条件为"$n=2007$".

于是问题转化为:在数列$\{x_n\}$中,$x_1=4$,$x_{n+1}=\begin{cases}x_n+3, & n=2k-1,\\ 4x_n, & n=2k,\end{cases}$ $k\in \mathbf{N}$,求 x_{2007}.

所以 $x_{2n+2}=x_{2n+1}+3=4x_{2n}+3$,即 $x_{2n+2}+1=4x_{2n}+4=4(x_{2n}+1)$.

令 $a_n=x_{2n}+1$,则 $a_{n+1}=4a_n$,所以数列$\{a_n\}$为等比数列,且 $a_1=x_2+1=(x_1+3)+1=8$,所以 $a_n=8\times 4^{n-1}=2\times 4^n$,故 $x_{2n}=2\times 4^n-1$,所以 $x_{2n-2}=2\times 4^{n-1}-1$,所以 $x_{2n-1}=4x_{2n-2}=4(2\times 4^{n-1}-1)=2\times 4^n-4$.故 $x_{2007}=x_{2\times 1004-1}=2\times 4^{1004}-4=2^{2009}-4$,即打印出来的$x$的值为 $2^{2009}-4$.

(2)由于经过语句(2)~(6)的小循环后,n为偶数时才执行语句(7)("$y=y+4$"),从数列角度来看,它可以理解为 $y_{2n+1}=y_{2n-1}+2(n\in \mathbf{N}^*)$.

令 $b_n=y_{2n-1}$,则 $b_{n+1}=b_n+2$,数列$\{b_n\}$为等差数列,且 $b_1=y_1=2$,所以 $b_n=2+2(n-1)=2n$.

所以 $y_{2n-1}=2n$.此时语句(8)("$x=x+\frac{y}{x+4}$")执行的程序是 $x_{2n+1}=x_{2n-1}+\frac{y_{2n-1}}{x_{2n-1}+4}$.于是

令 $c_n=\frac{y_{2n-1}}{x_{2n-1}+4}$,则 x_{2n+1}为数列$\{c_n\}$的前项和,故 $x_{2n+1}=\frac{y_1}{x_1+4}+\frac{y_3}{x_3+4}+\cdots+\frac{y_{2n-1}}{x_{2n-1}+4}=\frac{2}{4^2}+\frac{3}{4^3}+\cdots+\frac{n}{4^n}$,两边同乘以$\frac{1}{4}$得$\frac{1}{4}x_{2n+1}=\frac{2}{4^3}+\frac{3}{4^4}+\cdots+\frac{n-1}{4^n}+\frac{n}{4^{n+1}}$.

两式相减得

$$\begin{aligned}\frac{3}{4}x_{2n+1}&=\frac{2}{4^2}+\frac{1}{4^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{4^n}-\frac{n}{4^{n+1}}\\&=\frac{1}{4^2}+\frac{\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)}{1-\frac{1}{4}}-\frac{n}{4^{n+1}}\\&=\frac{1}{4^2}+\frac{1}{12}\left(1-\frac{1}{4^{n-1}}\right)-\frac{n}{4^{n+1}}\\&=\frac{7}{48}-\frac{3n+1}{3\times 4^n},\end{aligned}$$

即

$$x_{2n+1}=\frac{7}{36}-\frac{12n+4}{9\times 4^n}.$$

故 $x_{2007}=x_{2\times 1003+1}=\frac{7}{36}-\frac{3013}{9\times 2^{2006}}$,即打印出来的$x$的值为$\frac{7}{36}-\frac{3013}{9\times 2^{2006}}$.

(3)由于对于任意的自然数n,都有 $x_{2n+1}=\frac{7}{36}-\frac{12n+4}{9\times 4^n}<1$,即不存在自然数$n$,使得 $x_{2n+1}\geq 1$.所以张三同学说的是对的.

19. 令 $a_n+\frac{1}{a_{n+1}}=a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}}=a_{n+2}+\frac{1}{a_n}=k$,则有



$$\frac{1}{a_{n+1}} = k - a_n, \tag{1}$$

$$a_{n+1} = k - \frac{1}{a_{n+2}}, \tag{2}$$

$$a_{n+2} = k - \frac{1}{a_n} \tag{3}$$

把式(3)代入式(2),整理得

$$a_{n+1} = k - \frac{a_n}{k \cdot a_n - 1}, \tag{4}$$

把式(4)代入式(1),整理得

$$(k^2-1)\cdot(a_n^2 - ka_n + 1) = 0,$$

即 $k^2=1$ 或 $a_n^2 - ka_n + 1 = 0$.若 $k=1$,则有 $a_1 + \frac{1}{a_2} = 1$,而 $a_1 = 1$,所以 $\frac{1}{a_2} = 0$ 这是不可能成立的!故 $k \neq 1$.从而 $k=-1$ 或 $a_n^2 - ka_n + 1 = 0$.

(1) 若 $k \neq -1$,则 $a_n^2 - ka_n + 1 = 0$,即 $a_n + \frac{1}{a_n} = k$ 又 $a_n + \frac{1}{a_{n+1}} = k$,可得:$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_{n+1}}$,即,$a_{n+1} = a_n$,故 $a_{n+1} = a_n = a_{n-1} = \cdots = a_2 = a_1 = 1$.从而,$\sum_{i=1}^{2007}(a_ia_{i+1}+1)(a_ia_{i+2}+1) = 4\times 2007 = 8028$.

(2) 若 $k=-1$,则 $a_{n+1} = -\frac{a_{n+2}+1}{a_{n+2}}$,又因为 $a_n = -\frac{1}{a_{n+2}+1}$,所以由两式相乘得 $a_n \cdot a_{n+1} = \frac{1}{a_{n+2}}$,即,$a_na_{n+1}a_{n+2} = 1$.从而 $a_{n+1}a_{n+2}a_{n+3} = 1$,

所以
$$a_n = a_{n+3}. \tag{5}$$

由 $a_1 = 1$,$k=-1$ 及式(1),式(3)得 $a_2 = -\frac{1}{2}$,$a_3 = -2$,再由式(5)得,

$a_{3t+1} = a_1 = 1$,$a_{3t+2} = a_2 = -\frac{1}{2}$,$a_{3(t+1)} = a_3 = -2\ (t=0,1,2,3,\cdots)$

因此,$(a_1a_2+1)(a_1a_3+1) = -\frac{1}{2}$,$(a_2a_3+1)(a_2a_4+1) = (a_2a_3+1)(a_2a_1+1) = 1$,$(a_3a_4+1)(a_3a_5+1) = (a_3a_1+1)(a_3a_2+1) = -2$.

故
$$\sum_{i=1}^{2007}(a_ia_{i+1}+1)(a_ia_{i+2}+1) = \frac{2007}{3}\left(-\frac{1}{2}+1-2\right) = -\frac{2007}{2}$$

综上所述,$\sum_{i=1}^{2007}(a_ia_{i+1}+1)(a_ia_{i+2}+1)$ 等于 8028 或 $-\frac{2007}{2}$

20. 题给递推式可写成

$$a_{n+1} - 3a_n = (2n^2 - n + 1)(-1)^n + n^2 + 2n - 3, n \in \mathbf{N}, \tag{1}$$

令
$$a_n = b_n + (xn^2 + yn + z)(-1)^n + un^2 + vn + w, n \in \mathbf{N}, \tag{2}$$

其中 x,y,z,u,v,w 为待定系数,以使下式成立:

$$b_{n+1}-3b_n=0, n\in \mathbb{N}. \tag{3}$$

把(2)式代入(1)式,易解得 $x=-\frac{1}{2}, y=\frac{1}{2}, z=-\frac{1}{4}, u=-\frac{1}{2}, v=-\frac{3}{2}, w=\frac{1}{2}$.

所以,$\{b_n\}(n\geqslant 0)$ 为等比数列,公比为3,首项为 $b_0=a_0-x-w=\frac{1}{2}$,通项为 $b_n=b_0\cdot 3^n=\frac{3^n}{4}$, $n\in \mathbb{N}$. 代入(2)式得

$$a_n=\frac{1}{4}\left[(-2n^2+2n-1)(-1)^n-2(n^2+3n-1)+3^{n-1}\right], n\in \mathbb{N}. \tag{4}$$

也可表示为

$$a_n=\begin{cases}\frac{1}{4}(3^{2m-1}-16m^2-8m+1), & n=2m,\\ \frac{1}{4}(3^{2m}-16m-5), & n=2m+1,\end{cases} n\in \mathbb{N}. \tag{5}$$

$\{a_n\}(n\geqslant 0)$ 的前10项为,$\frac{1}{3}$, -1, -5, -3, -13, 11, 19, 169, 475, 1623, 并且

$$S_n=a_0+a_1+\cdots+a_n=\frac{1}{24}\left[3^{n+1}-6(-1)^n n^2-4n^3-24n^2-8n+5\right], n\in \mathbb{N}. \tag{6}$$

4 含 a_n, S_n 的递推数列

1. B $a_1=S_1=5+m$, $n\geqslant 2$ 时,$a_n=S_n-S_{n-1}=4\cdot 5^{n-1}$, $5+m=4$ 即 $m=-1$ 时为等比数列

2. A 由已知递推公式,

$x_1=a, x_2=b, x_3=x_2-x_1=b-a, x_4=x_3-x_2=-a, x_5=x_4-x_3=-b$.

类似可得 $x_6=a-b, x_7=a, x_8=b, \cdots$.

可以发现 $x_1=x_7=x_{13}=\cdots=x_{97}, x_2=x_8=x_{14}=\cdots=x_{98}, \cdots$.

一般地,有周期性 $x_i=x_{6k+i}(k\in \mathbb{N})$.

又因为 $x_{100}=x_4=-a$, 且 $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5+x_6=0$, 故 $S_{100}=x_1+x_2+x_3+x_4=2b-a$

应选 A

说明 由 $x_1=a, x_4=-a$, 猜想 $x_{i+3}=-x_i$, 于是有 $x_{i+6}=-x_{i+3}=-(-x_i)=x_i$. 事实上,

$x_{i+3}=x_{i+2}-x_{i+1}=(x_{i+1}-x_i)-x_{i+1}=-x_i$, $x_{i+6}=x_{(i+3)+3}=-x_{i+3}=x_i$.

3. B 根据组合数的性质,数列 1, 3, 3, 4, 6, 5, 10, …, 其实是由 $C_2^2, C_3^1, C_3^2, C_4^1, C_4^2, C_5^1, C_5^2, \cdots$ 组成的. 因此,

$$\begin{aligned}S_{17}&=C_2^2+C_3^1+C_3^2+C_4^1+C_4^2+\cdots+C_{10}^1+C_{10}^2\\&=(C_2^2+C_3^2+C_4^2+\cdots+C_{10}^2)+(C_1^1+C_2^1+C_3^1+\cdots+C_{10}^1)-C_3^1\\&=C_{11}^3+C_{11}^2-3=C_{12}^3-3=217.\end{aligned}$$

4. D 取满足条件的特殊数列,令 $A_n=n(7n+45)$, $B_n=n(n+3)$, 则 $a_n=A_n-A_{n-1}=14n+38$, $b_n=B_n-B_{n-1}=2n+2$. 所以 $\frac{a_n}{b_n}=\frac{14n+38}{2n+2}=7+\frac{12}{n+1}$



能使$\frac{a_n}{b_n}$为整数的正整数 n 取值，必使 $n+1=2,3,4,6,12$ 共5个，选 D．

5．C　由递推式得：$3(a_{n+1}-1)=-(a_n-1)$，则$\{a_n-1\}$是以8为首项，公比为$-\frac{1}{3}$的等比数列，

故
$$S_n-n=(a_1-1)+(a_2-1)+\cdots+(a_n-1)$$
$$=\frac{8\left[1-\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]}{1+\frac{1}{3}}=6-6\times\left(-\frac{1}{3}\right)^n.$$

所以 $|S_n-n-6|=6\times\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{125}$，得：$3^{n-1}>250$，所以满足条件的最小整数 $n=7$，故选C．

6．B　$a_n+a_{n+1}=n\sin\theta+\cos\theta$，$a_{n-1}+a_n=(n-1)\sin\theta+\cos\theta$，两式相减，得 $a_{n+1}-a_{n-1}=\sin\theta$，因此，$\{a_n\}$的奇数项和偶数项都是等差数列，公差为 $\sin\theta$，且 $a_1=\cos\theta$，$a_2=\sin\theta$．

由等差数列求和公式，得
$$a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1}$$
$$=(n+1)a_1+\frac{n(n+1)}{2}d$$
$$=(n+1)\cos\theta+\frac{n(n+1)}{2}\sin\theta.$$
$$a_2+a_4+\cdots+a_{2n}=na_2+\frac{n(n-1)}{2}d=n\sin\theta+\frac{n(n-1)}{2}\sin\theta.$$

故
$$S_{2n+1}=a_1+a_2+a_3+a_4+\cdots+a_{2n}+a_{2n+1}$$
$$=(a_1+a_3+\cdots+a_{2n+1})+(a_2+a_4+\cdots+a_{2n})$$
$$=(n+1)\cos\theta+\frac{n(n+1)}{2}\sin\theta+n\sin\theta+\frac{n(n-1)}{2}\sin\theta$$
$$=(n+1)\cos\theta+n(n+1)\sin\theta.$$

因此选 B．

7．$\frac{2}{n(n+1)}(n=1,2,3,\cdots)$，2　由 $S_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}$ 和 $S_n=n^2a_n$，两式相减得 $a_{n+1}=(n+1)^2a_{n+1}-n^2a_n$．

整理得：$(n+2)a_{n+1}=na_n$，即$(n+2)(n+1)a_{n+1}=(n+1)na_n$．

由此可知$\{(n+1)na_n\}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 是常数列．所以，$(n+1)na_n=2\cdot1\cdot a_1=2$．即 $a_n=\frac{2}{n(n+1)}$，$n=1,2,3,\cdots$　则 $S=\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n^2}{n(n+1)}=2$．

8．$\frac{2n}{n+1}$　由题给递推式可得
$$3(a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1})=(n+3)\cdot a_{n+1}, \qquad (1)$$

(1)式与题给递推式相减，得 $3a_{n+1}=(n+3)a_{n+1}-(n+2)a_n$．即有 $na_{n+1}=(n+2)a_n$，亦即$\frac{a_{n+1}}{n+2}=\frac{a_n}{n}$．



可以写成 $\frac{a_{n+1}}{(n+1)(n+2)}=\frac{a_n}{n(n+1)}$，于是有 $\frac{a_n}{n(n+1)}=\frac{a_{n-1}}{(n-1)n}=\cdots=\frac{a_1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}$

所以 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}(n\geq 1)$。于是得

$$\frac{1}{a_n}=\frac{2}{n(n+1)}=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right),$$

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}=2\left[\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)\right]$$

$$=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}.$$

9. $\begin{cases}1, n=1,\\ 8(n-1), n>1.\end{cases}$ $S_n\sqrt{S_{n-1}}-S_{n-1}\sqrt{S_n}=2\sqrt{S_nS_{n-1}}$

$$\Rightarrow \sqrt{S_nS_{n-1}}(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}-2)=0$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}}=2$$

$$\Rightarrow \sqrt{S_n}=2(n-1)+1=2n-1$$

$$\Rightarrow S_n=(2n-1)^2.$$

于是 $a_n=S_n-S_{n-1}=(2n-1)^2-(2n-3)^2=8(n-1),(n>1).$

答案为：

$$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ 8(n-1), & n>1.\end{cases}$$

10. $\frac{n!}{2}$. 因为

$$a_n=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}(n\geq 2) \tag{1}$$

所以

$$a_{n+1}=a_1+2a_2+3a_3+\cdots+(n-1)a_{n-1}+na_n \tag{2}$$

所以，(2)－(1) 得 $a_{n+1}-a_n=na_n$，则 $a_{n+1}=(n+1)a_n(n\geq 2)$，则 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=n+1(n\geq 2)$

所以

$$a_n=\frac{a_n}{a_{n-1}}\cdot\frac{a_{n-1}}{a_{n-2}}\cdot\cdots\cdot\frac{a_3}{a_2}\cdot a_2$$

$$=[n(n-1)\cdot\cdots\cdot 4\cdot 3]\cdot a_2=\frac{n!}{2}\cdot a_2 \tag{3}$$

由(1)式，取 $n=2$ 得 $a_2=a_1+2a_2$，则 $a_2=a_1$，又知 $a_1=1$，则 $a_2=1$，代入(3)式得

$$a_n=1\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot n=\frac{n!}{2}.$$

11. $2^{2007}-2$. 因为 $\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{1}{\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$

所以 $2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\frac{1}{\sqrt{n}}<2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$,



所以 $2\sum\limits_{n=1}^{N}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})<\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+2\sum\limits_{n=2}^{N}(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$,

所以 $2(\sqrt{N}-1)<2(\sqrt{N+1}-1)<\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<1+2(\sqrt{N}-1)$

所以 $2(2^{2006}-1)<2(\sqrt{N+1}-1)<\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}<2\cdot2^{2006}-1$.

所以不超过 $\sum\limits_{n=1}^{N}\frac{1}{\sqrt{n}}$ 的最大整数为 $2^{2007}-2$. 答案为 $2^{2007}-2$.

13. 2005. 设第 n 个等边三角形的边长为 a_n,则第 n 个等边三角形在抛物线上的顶点 B_n 的坐标为

$$\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2},\sqrt{\frac{3}{2}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\right)}\right)$$

再由第 n 个等边三角形,可得 B_n 的纵坐标为 $\sqrt{a_n^2-\left(\frac{1}{2}a_n\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{2}a_n$,

从而有 $\frac{\sqrt{3}}{2}a_n=\sqrt{\frac{3}{2}\left(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}\right)}$,即 $\frac{1}{2}a_n^2=a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}+\frac{a_n}{2}$

由此可得

$$a_1+a_2+\cdots+a_n=\frac{a_n}{2}+\frac{1}{2}a_n^2, \tag{1}$$

$$a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}=\frac{a_{n-1}}{2}+\frac{1}{2}a_{n-1}^2, \tag{2}$$

式(1)－式(2)得, $a_n=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})+\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})(a_n+a_{n-1})$,

变形可得 $(a_n-a_{n-1}-1)\cdot(a_n+a_{n-1})=0$.

由于 $a_n+a_{n-1}\neq0$,所以 $a_n-a_{n-1}=1$.

在式(1)中取 $n=1$,可得 $\frac{1}{2}a_1=\frac{1}{2}a_1^2$,而 $a_1\neq0$,故 $a_1=1$. 因此第 2005 个等边三角形的边长为 $a_{2005}=2005$.

说明 本题以解析几何为背景,考查递推数列中 S_n 与 a_n 的关系 $a_n=\begin{cases}S_1, & n=1,\\ S_n-S_{n-1}, & n\geq2.\end{cases}$ 本题根据题意得到式(1),再根据递推关系得式(2),是解题的关键,这也是解决递推数列通项的常用方法.

13. (1) 因为 $S_n=2a_n-3\cdot2^n+4$,所以 $S_{n+1}=2a_{n+1}-3\cdot2^{n+1}+4$,两式相减得

$$S_{n+1}-S_n=2(a_{n+1}-a_n)-3(2^{n+1}-2^n),$$

即 $a_{n+1}=2(a_{n+1}-a_n)-3\cdot2^n$,则 $a_{n+1}=2a_n+3\cdot2^n$.

两边除以 2^{n+1},得 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\frac{3}{2}$,则 $\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}-\frac{a_n}{2^n}=\frac{3}{2}$.



因为 $S_n = 2a_n - 3\cdot 2^n + 4$，所以 $a_1 = 2a_1 - 3\cdot 2^1 + 4$，所以 $a_1 = 2$.

故数列 $\left\{\frac{a_n}{2^n}\right\}$ 是以 $\frac{a_1}{2^1} = \frac{2}{2} = 1$ 为首项，以 $\frac{3}{2}$ 为公差的等差数列，由等差数列的通项公式得 $\frac{a_n}{2^n} = 1 + (n-1)\cdot\frac{3}{2}$，所以数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = \left(\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\right)\cdot 2^n$

(2) 由(1)知 $a_n = \left(\frac{3}{2}n - \frac{1}{2}\right)\cdot 2^n$，代入 $S_n = 2a_n - 3\cdot 2^n + 4$，得 $S_n = (3n-4)\cdot 2^n + 4$，则 $S_n - 4 = (3n-4)\cdot 2^n$. 因为 T_n 为数列 $\{S_n - 4\}$ 的前 n 项和，则

$$T_n = (S_1-4) + (S_2-4) + \cdots + (S_n-4),$$

则
$$T_n = (3\cdot 1-4)\cdot 2^1 + (3\cdot 2-4)\cdot 2^2 + \cdots + (3n-4)\cdot 2^n, \quad (1)$$
$$2T_n = (3\cdot 1-4)\cdot 2^2 + (3\cdot 2-4)\cdot 2^3 + \cdots + (3n-4)\cdot 2^{n+1}, \quad (2)$$

(1) 式与(2)式错位相减，得

$$-T_n = (3\cdot 1-4)\cdot 2^1 + 3\cdot 2^2 + 3\cdot 2^3 + \cdots + 3\cdot 2^n - (3n-4)\cdot 2^{n+1}$$
$$= -2 + 3\cdot(2^2 + 2^3 + \cdots + 2^n) - (3n-4)\cdot 2^{n+1}$$
$$= -2 + 3\cdot\frac{2^2(1-2^{n-1})}{1-2} - (3n-4)\cdot 2^{n+1}$$
$$= -14 + (14-6n)\cdot 2^n$$

所以
$$T_n = 14 - (14-6n)\cdot 2^n.$$

14. (1) 由 $a_1 = S_1 = \frac{1}{4}(a_1 - 1)(a_1 + 3)$ 及 $a_n > 0$ 得，$a_1 = 3$. 由 $S_n = \frac{1}{4}(a_n - 1)(a_n + 3)$ 得 $S_{n-1} = \frac{1}{4}(a_{n-1} - 1)(a_{n-1} + 3)$，故 $a_n = \frac{1}{4}(a_n^2 - a_{n-1}^2) + 2(a_n - a_{n-1})$，$2(a_n + a_{n-1}) = (a_n + a_{n-1})(a_n - a_{n-1})$

因为 $a_n + a_{n-1} > 0$ 所以 $a_n - a_{n-1} = 2$，$\{a_n\}$ 是以 3 为首项，2 为公差的等差数列，故 $a_n = 2n + 1$.

(2) 因为 $a_n = 2n + 1$，所以 $S_n = n(n+2)$，$b_n = \frac{1}{S_n} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)$，

$$T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n = \frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+2}\right)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}$$

15. (1) 当 $n = 1$ 时，由 $2(S_1 + 1) = a_1^2 + a_1$，解得 $a_1 = 2$；当 $n \geq 2$ 时，由 $2(S_n + 1) = a_n^2 + a_n$，得 $2(S_{n-1} + 1) = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$，两式相减，并利用 $a_n = S_n - S_{n-1}$，求得 $a_n - a_{n-1} = 1$，所以数列 $\{a_n\}$ 是首项为 2，公差为 1 的等差数列. 所以 $a_n = n + 1 (n \in N^*)$

(2) 因为 b_n 是首项为 2，公比为 2 的等比数列，故 $b_n = 2^n$.

当 n 偶数时，$T_n = (a_1 + a_3 + \cdots + a_{n-1}) + (2^2 + 2^4 + \cdots + 2^n)$

$$= \frac{a_1 + a_{n-1}}{2}\cdot\frac{n}{2} + \frac{4(1 - 2^n)}{1-4} = \frac{n^2 + 2n}{4} + \frac{4}{3}(2^n - 1).$$



(3) 因为 $P_n = \frac{n^2}{4} + 24n$（$n$ 为偶数）．设 $d_n = T_n - P_n = \frac{4}{3}\cdot 2^n - \frac{47}{2}n - \frac{4}{3}$（$n$ 为偶数），

所以 $d_4 < d_6 < d_8 < d_{10} < 2007 < d_{12} < d_{14} < \cdots$ 且 $d_2 < 2007$．（利用数列的单调性或函数的单调性判断）所以 $d_n \neq 2007$．即 $T_n - P_n \neq 2007$（n 为偶数）

因此同学乙的观点正确．

5 递推数列的性质

1. C $a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) - a_{n+1} = -a_n$，因此，对 $n \geqslant 1$，$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4} + a_{n+5} = 0$．从而数列中任意连续 6 项之和均为 0．而 $2005 = 334 \times 6 + 1$，$2006 = 334 \times 6 + 2$，所以前 2005 项之和为 a_1，即 $a_1 = 2006$．于是前 2006 项的和等于 $a_1 + a_2 = 2007$．所以选 C．

2. A 因为数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 2$，$a_{n+1} = -\frac{1}{a_n + 1}$，

所以 $a_2 = -\frac{1}{a_1 + 1} = -\frac{1}{3}$，$a_3 = -\frac{1}{a_2 + 1} = -\frac{1}{-\frac{1}{3} + 1} = -\frac{3}{2}$，$a_4 = -\frac{1}{a_3 + 1} = -\frac{1}{-\frac{3}{2} + 1} = 2$，

$a_5 = -\frac{1}{a_4 + 1} = -\frac{1}{2 + 1} = -\frac{1}{3}$，…

不难猜想，对 $n \in \mathbf{N}^*$，数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_{n+3} = a_n$，则 $a_{2007} = a_3 = -\frac{3}{2}$，故选 A．

3. C 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d，因为 $3a_5 = 7a_{10}$，即 $3(a_1 + 4d) = 7(a_1 + 9d)$，得 $d = -\frac{4}{51}a_1$，则等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 $a_n = a_1 + (n-1)\left(-\frac{4}{51}a_1\right) = a_1 \cdot \frac{55 - 4n}{51}$．

因为 $a_1 < 0$，$d = -\frac{4}{51}a_1 > 0$

要使前 n 项和 S_n（$n \in \mathbf{N}^*$）取最小值，只需 $\begin{cases} a_n \leqslant 0, \\ a_{n+1} > 0, \end{cases}$ 即 $\begin{cases} a_1 \cdot \frac{55 - 4n}{51} \leqslant 0, \\ a_1 \cdot \frac{55 - 4(n+1)}{51} > 0, \end{cases}$

于是 $\begin{cases} 55 - 4n \geqslant 0, \\ 51 - 4n < 0, \end{cases}$ $\frac{51}{4} < n \leqslant \frac{55}{4}$，

又 $n \in \mathbf{N}^*$，故 $n = 13$，选 C．

4. D 由题给图可知，

第 1 行 1 1

第 3 行 1 1 1 1

第 7 行 1 1 1 1 1 1 1 1

$2 - 1 = 1$，$2^2 - 1 = 3$，$2^3 - 1 = 7$，…，由不完全归纳知，第 n 次全行的数都是 1 的是 $(2^n - 1)$ 行

当 $n = 6$ 时，$2^6 - 1 = 63$，即第 63 行全是 1．根据规律写出第 61，62，63 行分别为：



第61行　1　1　0　1　…　0　1　1　…

第62行　1　0　1　0　…　0　1　…

第63行　1　1　1　1　…　1　1　…

由此可知,第61行中1的个数是32个,选D.

5. C　记 $f^{(n)}(x)=f\{f[\cdots f(x)\cdots]\}$($n$ 次迭代),则

$$f(90)=f^{(2)}(97)=f^{(3)}(104)=\cdots=f^{(131)}(1000).$$

由于　$f^{(n+4)}(1000)=f^{(n+3)}(997)=f^{(n+2)}(998)=f^{(n+1)}(999)=f^{(n)}(1000)$,

所以,$f^{(n)}(1000)$ 的一个周期为4.

$$f^{(131)}(1000)=f^{(4\times32+3)}(1000)=f^{(3)}(1000)=f^{(2)}(997)=f(998)=999.$$

因此,选C.

6. A　由 $a_1=6=5\times2^{1-1}+1$,$a_2=11=5\times2^{2-1}+1$,…,猜想:$a_n=5\times2^{n-1}+1$,然后用数学归纳法给予证明.于是当 $n>1$ 时,$a_n\equiv1\pmod{10}$.

故　$$a_1+a_2+\cdots+a_{2005}\equiv6+2005\equiv1\pmod{10}.$$ 选A.

7. 偶数,奇数交错出现的数列.　由二项式定理可知 $(1+\sqrt2)^n+(1-\sqrt2)^n=2\sum\limits_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2k}(\sqrt2)^{2k}$,即 $(1+\sqrt2)^n=$ 偶数 $-(1-\sqrt2)^n$.由于 $-1<1-\sqrt2<0$,故知 $|(1-\sqrt2)^n|<1$,且 $(1-\sqrt2)^n$ 正负交错,从而 $[(1+\sqrt2)^n]$ 是偶奇交错的数列.

8. -2997　由 $a_n=a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}$,可得 $a_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+3}+a_{n+4}$,则有

$$a_n=a_{n+1}-a_{n+2}+a_{n+3}=(a_{n+2}-a_{n+3}+a_{n+4})-a_{n+2}+a_{n+3}=a_{n+4}.$$

所以数列$\{a_n\}$是4以为周期的周期数列,为求前2002项的和,需要先求出 a_4.由递推关系式得,$a_4=a_1-a_2+a_3=-5$,又 $a_1+a_2+a_3+a_4=-6$,所以,$a_{4k+1}+a_{4k+2}+a_{4k+3}+a_{4k+4}=-6$,$(k\in N^*)$.又 $2002=4\cdot500+2$,所以,$a_1+a_2+\cdots+a_{2002}=500\cdot(-6)+a_1+a_2=-2997$.

9. $\left\{\frac{1}{5}\right\}$.　$a_{n+1}=2^n-3a_n=2^n-3\times2^{n-1}+3^2a_{n-1}=2^n-3\times2^{n-1}+3^2\times2^{n-2}-3^3a_{n-2}=\cdots=\frac{1}{5}\cdot2^{n+1}+\left(a_0-\frac{1}{5}\right)\cdot(-3)^{n+1}$,若 $a_0=\frac{1}{5}$,$a_n=\frac{1}{5}\cdot2^{n}$ 严格递增;若 $a_0\neq\frac{1}{5}$,$\left(a_0-\frac{1}{5}\right)(-3)^{n}$ 正负交错.由于 $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to0$,所以在 n 充分大时,a_n 正负交错.因此,所求集合为 $\left\{\frac{1}{5}\right\}$.

10. $2+\sqrt3$.　由 $a_1=1$,$a_{n+1}=\frac{\sqrt3a_n-1}{a_n+\sqrt3}$,得

$$a_2=\frac{\sqrt3-1}{1+\sqrt3}=\frac{-2\sqrt3+4}{2}=2-\sqrt3,$$

$$a_3=\frac{\sqrt3(2-\sqrt3)-1}{(2-\sqrt3)+\sqrt3}=\frac{2\sqrt3-4}{2}=-2+\sqrt3,$$

$$a_4=\frac{\sqrt3(-2+\sqrt3)-1}{(-2+\sqrt3)+\sqrt3}=\frac{-2\sqrt3+2}{2\sqrt3-2}=-1,$$



$$a_5=\frac{-\sqrt{3}-1}{-1+\sqrt{3}}=-\frac{2\sqrt{3}+4}{2}=-2-\sqrt{3},$$

$$a_6=\frac{\sqrt{3}(-2-\sqrt{3})-1}{(-2-\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{-2\sqrt{3}-4}{-2}=2+\sqrt{3},$$

$$a_7=\frac{\sqrt{3}(2+\sqrt{3})-1}{(2+\sqrt{3})+\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}+2}{2\sqrt{3}+2}=1.$$

故数列$\{a_n\}$是周期$T=6$的数列，又$2004\div6=334$，所以，$a_{2004}=a_6=2+\sqrt{3}$.

本题的另一种解法如下：

令$a_n=\tan\theta_n$，$-\frac{\pi}{2}<\theta_n<\frac{\pi}{2}(n=1,2,3,\cdots)$，由三角公式，得

$$\tan\theta_{n+1}=a_{n+1}=\frac{\sqrt{3}a_n-1}{a_n+\sqrt{3}}=\frac{a_n-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+\frac{a_n}{\sqrt{3}}}$$

$$=\frac{\tan\theta_n-\tan30^\circ}{1+\tan\theta_n\cdot\tan30^\circ}=\tan(\theta_n-30^\circ),$$

又$-\frac{\pi}{2}<\theta_n<\frac{\pi}{2}$，所以，$\theta_{n+1}=\theta_n-30^\circ$，$n=1,2,3,\cdots$

故$\{\theta_n\}$是公差为-30°的等差数列，其中$\theta_1=\arctan1=45^\circ$，因此，$\theta_n=45^\circ-(n-1)\times30^\circ$，$n=1,2,3,\cdots$

$$\theta_{2004}=45^\circ-2003\times30^\circ=45^\circ-167\times360^\circ+30^\circ=75^\circ+167\times360^\circ,$$

从而，有$a_{2004}=\tan\theta_{2004}=\tan75^\circ=\frac{\tan45^\circ+\tan30^\circ}{1-\tan45^\circ\cdot\tan30^\circ}=\frac{1+\frac{1}{\sqrt{3}}}{1-\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}=2+\sqrt{3}$

11. 1　与$a_{n+2}=a_n-a_{n+1}$对应的特征方程为$x^2+x-1=0$，它的根为$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$，故有$a_n=\alpha\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+\beta\left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$，由于$0<\frac{(-1+\sqrt{5})}{2}<1$，而$1<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，所以$\beta=0$，否则当$n$为充分大的奇数(若$\beta>0$)或偶数(若$\beta<0$)时，$a_n<0$，于是$a_n=\alpha\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$由$a_0=1$，得$\alpha=1$，因此$a_n=\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$.

12. 12.　$a_n=2002\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$f(n)=2002^n\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}$

因为

$$\frac{|f(n+1)|}{|f(n)|}=\frac{2002}{2^n},$$



所以当 $n \leqslant 10$ 时，$\dfrac{|f(n+1)|}{|f(n)|}=\dfrac{2002}{2^n}>1$。

所以
$$|f(11)|>|f(10)|>\cdots>|f(1)|;$$

当 $n \geqslant 11$ 时，$\dfrac{|f(n+1)|}{|f(n)|}=\dfrac{2002}{2^n}<1$。

所以
$$|f(11)|>|f(12)|>\cdots$$

因 $f(11)<0, f(10)<0, f(9)>0, f(12)>0$，所以 $f(n)$ 的最大值为 $f(9)$ 或 $f(12)$ 中的最大者

因为
$$\frac{f(12)}{f(9)}=\frac{2020^{12}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{66}}{2020^{9}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{36}}=2020^{3}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{30}=\left(\frac{2020}{2^{10}}\right)^{3}>1,$$

所以当 $n=12$ 时，$f(n)$ 有最大值为 $f(12)=2002^{12}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{66}$

13. 为证本题，只需证明：对每一个正整数 n，都有
$$\begin{aligned}\sqrt{S_{n+1}}-\sqrt{S_n}\geqslant 1 &\Leftrightarrow S_{n+1}\geqslant S_n+1+2\sqrt{S_n}\\ &\Leftrightarrow (k_{n+1}-1)^2\geqslant 4S_n\end{aligned} \tag{1}$$

由
$$\begin{aligned}S_n&=k_1+k_2+\cdots+k_n\\ &\leqslant (k_{n+1}-2n)+(k_{n+1}-2n+2)+\cdots+(k_{n+1}-2)\\ &=nk_{n+1}-n(n+1),\end{aligned}$$

及 $k_{n+1}\geqslant 2n+1$ 可知，只需证明在 $x\geqslant 2n+1$ 时，$(x-1)^2\geqslant 4nx-4n(n+1)$ 即可，而上式等价于 $[x-(2n+1)]^2\geqslant 0$. 所以，(1) 式得证. 从而原命题得证.

14. 由原递推关系可化为：$a_{n+1}\cdot a_{n-2}=1+a_na_{n-1}(n\geqslant 3, n\in \mathbf{N})$.

上式中将 $n+1$ 用 n 替代得：$a_na_{n-3}=1+a_{n-1}a_{n-2}$.

两式相减后得：
$$\begin{aligned}a_{n+1}a_{n-2}-a_na_{n-3}&=a_na_{n-1}-a_{n-1}a_{n-2}\\ &\Rightarrow a_{n-2}(a_{n+1}+a_{n-1})=(a_{n-1}+a_{n-3})a_n\\ &\Rightarrow \frac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=\frac{a_{n-1}+a_{n-3}}{a_{n-2}}\end{aligned}$$

令 $\dfrac{a_{n+1}+a_{n-1}}{a_n}=b_{n-1}$，则：$b_1=\dfrac{a_3+a_1}{a_2}=2$. 而 $b_2=\dfrac{a_4+a_2}{a_3}=\dfrac{2+1}{1}=3$，且 $b_{n-1}=b_{n-3}$，故对任何自然数 $n\geqslant 2$，有 $b_{2n-1}=2, b_{2n}=3$. 所以 $a_{2n+1}+a_{2n-1}=2a_{2n}$，$a_{2n+2}+a_{2n}=3a_{2n+1}$

由数学归纳法易证：a_n 都是整数.

15. 由 $b_{n+2}=6b_{n+1}-b_n$ 得特征方程 $x^2-6x+1=0$，知有两根 $3\pm 2\sqrt{2}$，
$$b_n=\lambda(3+2\sqrt{2})^n+\mu(3-2\sqrt{2})^n.$$



代入 $b_0=2$，$b_1=10$ 得 $\begin{cases}\lambda+\mu=2,\\ \lambda(3+2\sqrt{2})+\mu(3-2\sqrt{2})=10,\end{cases}$ 解得 $\begin{cases}\lambda=1+\frac{1}{\sqrt{2}},\\ \mu=1-\frac{1}{\sqrt{2}}.\end{cases}$

所以，$b_n=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^{2n+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2})^{2n+1}$，故可以令 $a_n=\frac{1}{2}\left[(1+\sqrt{2})^{2n+1}+(1-\sqrt{2})^{2n+1}\right]$

则 $a_n+\sqrt{2}\frac{b_n}{2}=(1+\sqrt{2})^{2n+1}$，$a_n-\sqrt{2}\frac{b_n}{2}=(1-\sqrt{2})^{2n+1}$，进而有 $a_n^2+\frac{b_n^2}{2}=1$.

由通项公式及 $b_0=2$，$b_1=10$ 知 b_n 为偶数.

因此，若 p 为 b_n 的一个素因数，则 $p\equiv1\pmod 4$，从而 b_n 可以写成 2 个整数的平方和的形式.

16. 由 $x_1=1$，$x_2=k$ 及题给递推式得 $x_3=k^2-1$，且 $x_{n+1}x_{n-1}=x_n^2-1$，$x_nx_{n-2}=x_{n-1}^2-1(n\geq3)$，

故 $x_{n+1}x_{n-1}-x_nx_{n-2}=x_n^2-x_{n-1}^2$，即，$x_{n+1}x_{n-1}+x_{n-1}^2=x_nx_{n-2}+x_n^2$，$\frac{x_{n+1}+x_{n-1}}{x_n}=\frac{x_n+x_{n-2}}{x_{n-1}}$.

于是，$\frac{x_n+x_{n-2}}{x_{n-1}}=\frac{x_3+x_1}{x_2}=k$，即

$$x_n=kx_{n-1}-x_{n-2}(n\geq3) \tag{1}$$

(1) 当 $k^2-4=0$，即 $k=\pm2$ 时，若 $k=2$，则 $x_n=2x_{n-1}-x_{n-2}$，$x_n-x_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}$，即

$x_n-x_{n-1}=x_2-x_1=1$，$x_n=n$，$x_1+x_3+\cdots+x_{2m-1}=1+3+\cdots+(2m-1)=m^2$；

若 $k=-2$，则 $x_n=-2x_{n-1}-x_{n-2}$，$x_n+x_{n-1}=-(x_{n-1}+x_{n-2})$.

所以 $x_n+x_{n-1}=(-1)^{n-2}(x_2+x_1)=(-1)^{n-1}$，$\frac{x_n}{(-1)^{n-1}}-\frac{x_{n-1}}{(-1)^{n-2}}=1$，

故 $\frac{x_n}{(-1)^{n-1}}=n$，$x_n=(-1)^{n-1}n$，$x_1+x_3+\cdots+x_{2m-1}=1+3+\cdots+(2m-1)=m^2$.

(2) 当 $k^2-4\neq0$ 时，方程式 $t^2=kt-1$ 有两个不相等根，设其为 α，β，则 $\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=1$. 代入(1)式，有 $x_n=(\alpha+\beta)x_{n-1}-\alpha\beta x_{n-2}$，即 $x_n-\alpha x_{n-1}=\beta(x_{n-1}-\alpha x_{n-2})$，或 $x_n-\beta x_{n-1}=\alpha(x_{n-1}-\beta x_{n-2})$.

所以 $x_n-\alpha x_{n-1}=\beta^{n-2}(x_2-\alpha x_1)=\beta^{n-2}(k-\alpha)=\beta^{n-1}$，

$x_n-\beta x_{n-1}=\alpha^{n-2}(x_2-\beta x_1)=\alpha^{n-2}(k-\beta)=\alpha^{n-1}$.

从以上两式得 $x_n=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\alpha^n)=\frac{1}{\beta-\alpha}(\beta^n-\beta^{-n})$

[illegible]

$$\begin{aligned}&x_1+x_3+\cdots+x_{2m-1}\\ &=\frac{1}{\beta-\alpha}[(\beta+\beta^3+\cdots+\beta^{2m-1})-(\beta^{-1}+\beta^{-3}+\cdots+\beta^{-2m+1})]\\ &=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta(\beta^{2m}-1)}{\beta^2-1}-\frac{\beta^{-1}(\beta^{-2m}-1)}{\beta^{-2}-1}\right]\\ &=\frac{1}{\beta-\alpha}\left[\frac{\beta(\beta^{2m}-1)}{\beta^2-1}-\frac{\beta(\beta^{-2m}-1)}{1-\beta^2}\right]\end{aligned}$$



$$=\frac{1}{\beta-\alpha}\cdot\frac{\beta(\beta^{2m}+\beta^{-2m}-2)}{\beta^2-1}$$

$$=\frac{\beta}{(\beta-\alpha)(\beta^2-\alpha\beta)}(\beta^m-\beta^{-m})^2$$

$$=\left(\frac{\beta^m-\beta^{-m}}{\beta-\alpha}\right)^2=x_m^2.$$

由 $x_1=1, x_2=k$ 为整数及递推式(1)知 x_m 为整数($m\in \mathbf{N}^*$)，故 $x_1+x_2+\cdots+x_{2m-1}=x_m^2$ 为完全平方数.

综上可知，$x_1+x_2+\cdots+x_{2m-1}$($m\in \mathbf{N}^*$)为完全平方数.

17. 记 $\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$，则

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=1}^{n}C_n^i(\alpha^i-\beta^i)=\frac{1}{\sqrt{5}}\sum_{i=0}^{n}C_n^i(\alpha^i-\beta^i)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\sum_{i=0}^{n}C_n^i\alpha^i-\sum_{i=0}^{n}C_n^i\beta^i\right)=\frac{1}{\sqrt{5}}[(1+\alpha)^n-(1+\beta)^n]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

注意到 $\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=3$，$\frac{3+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}=1$，可得

$$S_{n+2}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\right)-\left(\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right)\right]$$

$$=3S_{n+1}-S_n \tag{1}$$

因此，S_{n+2} 除以 8 的余数，完全由 S_{n+1}、S_n 除以 8 的余数确定.

因为 $S_1=C_1^1f_1$，$S_2=C_2^1f_1+C_2^2f_2=3$，故由(1)式可以算出$\{S_n\}$各项除以 8 的余数依次是 1，3，0，5，7，0，1，3，…，它是一个以 6 为周期的数列，从而 $8\mid S_n\Leftrightarrow 3\mid n$ 故当且仅当 $3\mid n$ 时，$8\mid S_n$.

18. 对满足 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 的自然数 n，将 n 的二进制表示为 $n=(x_kx_{k-1}\cdots x_0)_2$，这里 $x_k=1$，$x_i\in\{0,1\}$，$i=0,1,2,\cdots,k-1$. 可以证明

$$a_{(x_kx_{k-1}\cdots x_0)_2}=a_{(x_kx_{k-1}\cdots x_1)_2}+(-1)^{x_1+x_0} \tag{1}$$

事实上，如果 x_1+x_0 为偶数，则 $n\equiv 0,3 \pmod 4$，均有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为偶数，且 $\left[\frac{n}{2}\right]=(x_kx_{k-1}\cdots x_1)_2$；如果 x_1+x_0 为奇数，则 $n\equiv 1,2 \pmod 4$，均有 $\frac{n(n+1)}{2}$ 为奇数，且 $\left[\frac{n}{2}\right]=(x_kx_{k-1}\cdots x_1)_2$，所以(1)式成立.

反复利用(1)式，可知

$$a_{(x_kx_{k-1}\cdots x_0)_2}=(-1)^{x_k+x_{k-1}}+\cdots+(-1)^{x_1+x_0} \tag{2}$$

上式右边为 k 个 $+1$ 或 -1 的和，所以，当 k 为奇数时，上式右边为奇数，不会等于 0，这表明，当 k 为奇数时，满足 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 且 $a_n=0$ 的下标 n 的个数为 0.



当 k 为偶数时,若 $a_n=0$,则(2)式右边恰有 $\frac{k}{2}$ 个 -1,$\frac{k}{2}$ 个 1.

事实上,(2)式确定了一个映射 $\varphi: A\to B$,这里 $A=\{n \mid 2^k\leqslant n<2^{k+1}, n$ 为二进制表示为 $n=(x_kx_{k-1}\cdots x_0)_2\}$,$B=\{$由 $+1$ 或 -1 构成的项数为 k 的数列$\}$,并且

$$\varphi((x_kx_{k-1}\cdots x_0)_2)=((-1)^{x_k+x_{k-1}},(-1)^{x_{k-1}+x_{k-2}},\cdots,(-1)^{x_1+x_0})$$

由于 A 中任意两个元素的二进制表示首位都为 1,设 $n=(x_kx_{k-1}\cdots x_0)_2$,$n'=(x'_kx'_{k-1}\cdots x'_0)_2$,$x_k=x'_k=1$,并设 j 为使得 $x_j\neq x'_j$ 的最大下标,则 $(-1)^{x_{j+1}+x_j}\neq(-1)^{x'_{j+1}+x'_j}$,这表明 φ 是从 A 到 B 的单射,又易知 $|A|=|B|=2^k$,所以 φ 又是从 A 到 B 的满射,从而 φ 是从 A 到 B 的一一对应.

上述事实表明,为求使得 $2^k\leqslant n<2^{k+1}$ 且 $a_n=0$ 的下标 n 的个数,只需算出 B 中恰出现 $\frac{k}{2}$ 个 -1 的数列个数,而这个数目为 $C_k^{\frac{k}{2}}$.

综上所述,可知,当 k 为奇数时,满足条件的下标 n 的个数为 0;当 k 为偶数时,满足条件的下标 n 的个数为 $C_k^{\frac{k}{2}}$.

19. 先证惟一性.

设数列$\{a_n\}$满足题中所有条件,则

$$a_{k+1}^2-a_{k+1}+1=\frac{a_ka_{k+2}}{\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}+1}=\frac{(\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1})^3+1}{\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}+1}$$
$$=\sqrt[3]{(a_ka_{k+2}-1)^2}-\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}+1.$$

将上式变形得:

$$(a_{k+1}-\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1})(a_{k+1}+\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}-1)=0. \tag{1}$$

并且当某 $a_{k+1}>1$ 时,$a_{k+1}+\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}-1\neq 0$,则 $a_{k+1}-\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}=0$,

所以 $a_{k+2}=\frac{a_{k+1}^3+1}{a_k}>a_{k+1}$,于是 $a_{k+2}>1$.

所以式(1)等价于 $a_{k+1}-\sqrt[3]{a_ka_{k+2}-1}=0$,即

$$a_{k+1}^3=a_ka_{k+2}-1 \tag{2}$$

由 $a_3=1+a_2^3\Rightarrow a_4=\frac{a_3^3+1}{a_2}=\frac{(1+a_2^3)^3+1}{a_2}\in\mathbf{N}^*\Rightarrow a_2\mid 2$,又 $a_2>1\Rightarrow a_2=2$.

由(2)式知,该数列的所有项被 $a_1=1$,$a_2=2$ 所惟一确定.

再证存在性.

只需证明对满足 $a_1=1$,$a_2=2$,$a_{n+2}=\frac{a_{n+1}^3+1}{a_n}(n\in\mathbf{N}^*)$ 的数列$\{a_n\}$中每一项都是正整数即可.

事实上,先可求得 $a_1=1$,$a_2=2$,$a_3=9$,$a_4=365$.

对于 $n\geqslant 5$,假定 $a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}$ 都是正整数.

而 $a_n=\frac{a_{n-1}^3+1}{a_{n-2}}=\frac{1}{a_{n-2}}\left[\left(\frac{a_{n-2}^3+1}{a_{n-3}}\right)^3+1\right]=\frac{1}{a_{n-2}a_{n-3}^3}(a_{n-2}^9+3a_{n-2}^6+3a_{n-2}^3+1+a_{n-3}^3)$,

记 $l=\frac{1}{a_{n-3}^{3}}(a_{n-2}^{6}+3a_{n-2}^{4}+3a_{n-2}^{2}+1+a_{n-3}^{3})$，显然 $l=a_{n-1}^{3}+1$ 是正整数，

且 $$\frac{la_{n-3}^{3}}{a_{n-2}}=a_{n-2}^{5}+3a_{n-2}^{3}+3a_{n-2}+\frac{1+a_{n-3}^{3}}{a_{n-2}}=a_{n-2}^{5}+3a_{n-2}^{3}+3a_{n-2}+a_{n-4}\in \mathbf{N}^{*},$$

所以 $a_{n-2}\mid la_{n-3}^{3}$，

考虑 a_{n-2} 与 a_{n-3} 的最大公因数 $(a_{n-2},a_{n-3})=\left(\frac{a_{n-3}^{3}+1}{a_{n-4}},a_{n-3}\right)\leqslant(a_{n-3}^{3}+1,a_{n-3})=1$，

从而 $a_{n-2}a_{n-3}^{3}\mid(a_{n-2}^{6}+3a_{n-2}^{4}+3a_{n-2}^{2}+1+a_{n-3}^{3})$，则 a_n 是正整数.

综上，原命题成立。

20. 当 x_i 均等于1时满足条件，所以若存在所要求的最大值 x_0，则必大于等于1. 当取定 $x_{i-1}(i\geqslant1)$ 后，由条件(2)知，x_i 所能取的值必满足二次方程

$$2x^2-\left(x_{i-1}+\frac{2}{x_{i-1}}\right)x+1=(2x-x_{i-1})\left(x-\frac{1}{x_{i-1}}\right)=0,$$

所以必有 $$x_i=\frac{1}{2}x_{i-1} \text{ 或 } x_i=\frac{1}{x_{i-1}}. \tag{1}$$

易见，这两个值均满足条件(2). 因此，从初始值 x_0 开始，所能取的序列中的数必为以下形式，即

$$2^k x_0,\ 2^k x_0^{-1},\ k\in \mathbf{Z}.$$

由于 $x_0\geqslant1$，所以，为使(1)成立，x_{1995} 可能取值的形式是：x_0（$2^k x_0$ 中 $k=0$）或 $2^k x_0^{-1}$ $(k\in\mathbf{Z})$.

下面来证明：x_{1995} 仅可能取 $2^k x_0^{-1}$ 的形式，且最大可能取 $k=1994$. 因此，本题所求的最大值为 $x_0=2^{997}$.

我们先来分析满足条件(2)的序列所可能取值的途径. 我们用图来表示. x_0 取定后，x_1 可能取的值由图(1)所示. 若取 $x_1=x_0^{-1}$，则 x_2 可能取的值如图(2)所示. 若取 $x_1=2^{-1}x_0$，则 x_2 可能取的值如图(3)所示. 三个图合起来得到图(4).

所以，序列 x_0,x_1,x_2 所可能取的值，只要在图(4)中，从 x_0 出发，依次沿"→"所指方向来取值 x_1，x_2，共有四种可能. 按此道理，可以用这样的图示方法来表示序列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 所有可能取值的途径，从图(5)中的 x_0 出发，依次按"→"所指方向来取下一个值，直到取 x_n. 显然共有 2^n 种可能的途径. 如

$$x_0,2^{-1}x_0,2x_0^{-1},x_0^{-1},x_0,2^{-1}x_0,2^{-2}x_0,2^{2}x_0,x_0,x_0^{-1},2^{-1}x_0^{-1},2^{-2}x_0^{-1},2^{2}x_0,2x_0,x_0$$

分别给出了 $n=7$，$n=6$ 的两种序列的取值途径

$x_0\to 2^{-1}x_0$；$x_0\to x_0^{-1}$

(1)

$2^{-1}x_0^{-1}\leftarrow x_0^{-1}\to x_0$

(2)

$2^{-1}x_0\to 2^{-2}x_0$；$2^{-1}x_0\to 2x_0^{-1}$

(3)

$x_0\to 2^{-1}x_0\to 2^{-2}x_0$；$x_0\rightleftarrows x_0^{-1}$；$2^{-1}x_0^{-1}\leftarrow x_0^{-1}$；$2^{-1}x_0\to 2x_0^{-1}$

(4)

$\cdots\to 2^{k}x_0\to 2^{k-1}x_0\to\cdots\to 2^{2}x_0\to 2x_0\to x_0\to 2^{-1}x_0\to 2^{-2}x_0\to\cdots\to 2^{-k+1}x_0\to 2^{-k}x_0\to\cdots$

$\uparrow\downarrow$

$\leftarrow 2^{-k}x_0^{-1}\leftarrow 2^{-k+1}x_0^{-1}\leftarrow\cdots\leftarrow 2^{-2}x_0^{-1}\leftarrow 2^{-1}x_0^{-1}\leftarrow x_0^{-1}\leftarrow 2x_0^{-1}\leftarrow 2^{2}x_0^{-1}\leftarrow\cdots\leftarrow 2^{k-1}x_0^{-1}\leftarrow 2^{k}x_0^{-1}\leftarrow\cdots$

(5)

由图(4)的结构容易看出：若序列 $x_0,x_1,\cdots,x_n$ 的某一种取值途径，使 x_n 确实回到图中的 x_0，那么，这个序列的取值图必由一个封闭的圈路(可重复)表示，注意到 $x_n=x_0$，所以，在第一行取值的个数必比第二行取值的个数多1 因此，n 必为偶数，现在 $n=1995$，所以这种情形不可能出现 因此，仅可能是 $x_0=x_n=2^k x_0$ 显见，k 愈大，x_0 愈大 由图可知最大可取 $k=1994$ 这序列仅可能是

$$\begin{cases} x_i = 2^{-i} x_0, 0 \leqslant i \leqslant 1994, \\ x_{1995} = 2^{1994} x_0^{-1} \end{cases}$$

即 $x_0=2^{997}$，证毕

6 递推数列的极限

1. A $f(n^2)=1+2+3+\cdots+n^2=\frac{1}{2}n^2(n^2+1)$，从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f(n^2)}{[f(n)]^2}=2$.

2. B 只要画图就会很快解决，或只要给上述所求得的通项公式两边取极限得 $x_1=3$，此题不需要计算出 $x_n=\frac{2}{3}x_1+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}x_1$，由 $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$ 可以推出 $x_n+\frac{1}{2}x_{n-1}=x_{n-1}+\frac{1}{2}x_{n-2}=\cdots=x_2+\frac{1}{2}x_1=x_1$，两边取极限得 $x_1=3$；或由 $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})$ 可以推出 $x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$，则得 $x_3-x_2=-\frac{1}{2}(x_2-x_1)$，$x_4-x_3=-\frac{1}{2}(x_3-x_2)$，…，$x_n-x_{n-1}=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_{n-2})$，相加得 $x_n-x_2=-\frac{1}{2}(x_{n-1}-x_1)$，两边取极限再利用 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$ 得 $x_1=3$，故选 B.

3. C 令 $x_n=\frac{1}{a_n}$，则有 $x_{n+2}=\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{2}x_n$，于是 $(x_{n+2}-x_{n+1})=-\frac{1}{2}(x_{n+1}-x_n)$，所以

$$x_{n+1}-x_n=(x_2-x_1)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{a_2}-\frac{1}{a_1}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^n.$$

故 $x_{n+1}-x_1=\left(-\frac{1}{2}\right)^1+\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

所以 $x_{n+1}=x_1+\dfrac{\left(-\frac{1}{2}\right)-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{3}{2}}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$.

于是 $a_{n+1}=\dfrac{1}{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$

4. D 令 $y=0$ 得 $a_nx^2+2a_{n+1}x+a_{n+2}=0$. 因为 $2a_{n+1}=a_n+a_{n+2}$，所以方程化为 $(x+1)(a_nx+a_{n+2})=0$. 解得，$x_1=-1$，$x_2=-\frac{a_{n+2}}{a_n}$. 由 $a_n>0$，$d>0$ 得 $b_n=\left|1-\frac{a_{n+2}}{a_n}\right|=\frac{2d}{a_n}$ 于是

$$b_{n-1}b_n=\frac{4d^2}{a_{n-1}a_n}=4d\left(\frac{1}{a_{n-1}}-\frac{1}{a_n}\right)$$ 故有，$b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n=4d\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{a_n}\right)$



由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}[a_1+(n-1)d]^{-1}=0$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_1b_2+b_2b_3+\cdots+b_{n-1}b_n)=\frac{4d}{a_1}$，选 D.

5. A　由已知有 $a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n+2$，从而，$a_{n+1}-a_n=(a_2-a_1)+2(n-1)=2(n+1)$，故 $a_n=(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)+a_1=2(n+n-1+\cdots+2)+2=n(n+1)$

于是
$$\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{i(i+1)}<\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(i+1)=\frac{n+3}{2n}.$$

从而
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{2n}=\frac{1}{2}$$

另一方面
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}\geqslant\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}i=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$$

从而，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum\limits_{i=1}^{n}\sqrt{a_i}=\frac{1}{2}$ 成立. 选 A

6. B　由 $a_1=2$，$a_{n+1}=\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}$，得 $a_{n+1}^2=\frac{3+a_n}{2}$. 所以 $a_{n+1}^2-a_n^2=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$，即 $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n)=\frac{1}{2}(a_n-a_{n-1})$. 因为 $a_{n+1}+a_n$ 与 $\frac{1}{2}$ 均为正数，所以 $a_{n+1}-a_n$ 与 a_n-a_{n-1} 必同号. 因此可知，数列 $\{a_n\}$ 是单调的. 又 $a_1=2$，$a_2=\sqrt{\frac{5}{2}}<2$，知 $a_2-a_1<0$，因此，$\{a_n\}$ 是单调递减的. 所以 $b_n=|a_{n+1}-a_n|=a_n-a_{n+1}$，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n=a_1-a_{n+1}=2-a_{n+1}$.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=x$，则由 $a_{n+1}=\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{\frac{3+a_n}{2}}$，即有 $x=\sqrt{\frac{3+x}{2}}$，解得 $x=\frac{3}{2}$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{3}{2}$. 从而有 $\frac{3}{2}<a_{n+1}\leqslant a_2=\sqrt{\frac{5}{2}}$，$0.4<2-\frac{\sqrt{5}}{2}\leqslant S_n=2-a_{n+1}<2-\frac{3}{2}=0.5$. 故选 B.

7. $\frac{5}{2}$　因为 $a_n=2+\frac{1}{5}a_{n-1}$，所以 $a_n-\frac{5}{2}=\frac{1}{5}\left(a_{n-1}-\frac{5}{2}\right)$，则数列 $\{a_n-\frac{5}{2}\}$ 是首项为 $a_1-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}$，公比为 $\frac{1}{5}$ 的等比数列，则 $a_n-\frac{5}{2}=\frac{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$，所以 $a_n=\frac{5}{2}\cdot\left[1+\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}\right]$，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{5}{2}$

8. $\sqrt{a}$.　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则对 $x_{n+1}=\frac{1}{2}\left(x_n+\frac{a}{x_n}\right)$ 两边取极限，得 $A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right)$，即 $A^2=a$，$A=\sqrt{a}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A=\sqrt{a}$

9. 6　求解本题的关键是计算数列 $\{a_n\}$：1,3,6,… 的前 n 项和 $S(n)$. 根据杨辉三角的性质有 $a_2=a_1+2$，$a_3=a_2+3$，$a_4=a_3+4$，…，亦即 $a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=4$，…，$a_n-a_{n-1}=n$. 将以上 $n-1$ 个等式累加即得 $a_n-a_1=2+3+\cdots+n$. 故 $a_n=1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$

所以
$$S(n)=\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}k^2+\sum_{k=1}^{n}k\right)$$
$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}+\frac{n(n+1)}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)}{6},$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{S(n)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^3}{\frac{n(n+1)(n+2)}{6}}=6.$$

10. $\frac{1}{3}$. 因为 $a_{n+1}^2+2a_{n+1}a_n+a_n^2-2(a_n+a_{n+1})+1=4a_{n+1}a_n$.

所以 $(a_{n+1}+a_n-1)^2=4a_{n+1}a_n$, $a_{n+1}+a_n-1=2\sqrt{a_{n+1}a_n}$, $(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})^2=1$, $\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=1$

令 $\sqrt{a_n}=b_n$, $b_n=b_1+n-1=n$, $a_n=n^2$. 所以 $S_n=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$, $\frac{S_n}{na_n}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}=\frac{1}{3}+\frac{3n+1}{6n^2}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{na_n}=\frac{1}{3}$

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+1}-an-b\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(1-a)n^2-(a+b)n-b+1}{n+1}=0$,

所以 $\begin{cases}1-a=0,\\-(a+b)=0,\end{cases}$ 解得 $a=1$, $b=-1$.

12. $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$. 由 $b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}$, 得 $a_{n+1}=\frac{b_{n+1}^2}{b_n}$, 代入 $a_{n+1}=\frac{2a_nb_n}{a_n+b_n}$ 得 $\frac{b_{n+1}^2}{b_n}=\frac{2\frac{b_n^2}{b_{n-1}}b_n}{\frac{b_n^2}{b_{n-1}}+b_n}=\frac{2b_n^2}{b_n+b_{n-1}}$,

得 $\left(\frac{b_n}{b_{n+1}}\right)^2=\frac{1+\frac{b_{n-1}}{b_n}}{2}$, 令 $\frac{b_n}{b_{n+1}}=t_n$, 则 $t_n^2=\frac{1+t_{n-1}}{2}$, 与 $\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1+\cos\theta}{2}$ 比较, 得 $t_0=\cos\frac{\pi}{6}$,

所以 $t_n=\cos\frac{\pi}{6\cdot 2^n}$, 所以 $b_n=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}{\frac{\pi}{3\cdot 2^n}}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$.

13. $\left(\frac{\sqrt[3]{2}}{2},+\infty\right)$. 由 $\sqrt{tS_n}=\frac{t+a_n}{2}$, 得 $S_n=\frac{1}{4t}(t+a_n)^2$. 当 $n=1$ 时, 由 $a_1=S_1=\frac{1}{4t}(t+a_1)^2$, 得 $a_1=t$; 当 $n\geqslant 2$ 时, $a_n=S_n-S_{n-1}=\frac{1}{4t}[(t+a_n)^2-(t+a_{n-1})^2]$, 化简得 $a_n-a_{n-1}=2t$, 所以 $a_n=(2n-1)t$, 从而 $S_n=n^2t$. 由 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{S_n}}{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n\sqrt{t}}{(2n-1)t}=\frac{1}{2\sqrt{t}}<t$, 得 $t>\frac{\sqrt[3]{2}}{2}$.

14. 设第 n 次去健身房的人数为 a_n, 去娱乐室的人数为 b_n, 则 $a_n+b_n=150$. 所以 $a_n=\frac{9}{10}a_{n-1}+\frac{2}{10}b_{n-1}=\frac{9}{10}a_{n-1}+\frac{2}{10}(150-a_{n-1})=\frac{7}{10}a_{n-1}+30$, 即 $a_n=\frac{7}{10}a_{n-1}+30$. 所以 $a_n-100=\frac{7}{10}(a_{n-1}-100)$, 于是 $a_n-100=(a_1-100)\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}$, 即 $a_n=100+\left(\frac{7}{10}\right)^{n-1}\cdot(a_1-100)$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=100$. 故随着时间的推移, 去健身房的人数稳定在 100 人左右.

15. (1) 由中点坐标公式得 $x_n=\frac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2})(n\geqslant 3)$.



(2) 由已知得，$a_1=a, a_2=-\frac{a}{2}, a_3=\frac{a}{4}$，由此推测通项 $a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdot a, n\in \mathbf{N}^*$）

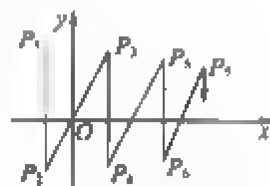
证明，由于 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=\frac{\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=-\frac{1}{2}$，

故$\{a_n\}$是公比为$-\frac{1}{2}$的等比数列，则 $a_n=a_1\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}a$.

(3) 由于 $x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_3-x_2)+(x_2-x_1)+x_1=a_{n-1}+a_{n-2}+\cdots+a_2+a_1+0$，又因为等比数列$\{a_n\}$的公比$-\frac{1}{2}\in(-1,1)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{a_1}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{2}{3}a_1=\frac{2}{3}a$.

说明 点列 $A_1(x_1,0),A_2(x_2,0),A_3(x_3,0),\cdots$ 在定点 $A\left(\frac{2a}{3},0\right)$的左右两边来回摆动并无限趋近于这一点 A.

16. (1) 由已知得 $y_{2k-1}=-\frac{3}{2}y_{2k}=-\frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{3}{4}y_{2k+1}\right)=\frac{9}{8}y_{2k+1}\neq 0$，则 $y_{2k+1}=\frac{8}{9}y_{2k-1}\neq 0$，$y_{2k-1}=y_1\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}=3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}$，$y_{2k}=-\frac{2}{3}y_{2k-1}=-2\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}$.



第 16 题图

于是，将下标换元得 $y_k=\begin{cases}3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{k-1}{2}}, & k\text{为正奇数，}\\ -2\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{k}{2}-1}, & k\text{为正偶数}\end{cases}$

故点列$\{P_k\}$的纵坐标数列$\{y_n\}$的通项公式是

$$y_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\cdot 3\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}+\frac{1+(-1)^n}{2}\cdot(-2)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$$=\frac{3}{2}[1-(-1)^n]\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}-[1+(-1)^n]\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

如图所示，由于 $2=\frac{y_{2k+1}-y_{2k}}{x_{2k+1}-x_{2k}}$ 且有 $4y_{2k}=-3y_{2k+1}$，$x_{2k}=x_{2k-1}$，

则 $$x_{2k+1}-x_{2k-1}=-\frac{7}{6}y_{2k}=-\frac{7}{6}\cdot(-2)\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}=\frac{21}{8}\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^k,$$

则 $x_{2k-1}=(x_{2k-1}-x_{2k-3})+(x_{2k-3}-x_{2k-5})+\cdots+(x_5-x_3)+(x_3-x_1)+x_1$

$$=\frac{21}{8}\cdot\left[\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}+\left(\frac{8}{9}\right)^{k-2}+\cdots+\left(\frac{8}{9}\right)^2+\left(\frac{8}{9}\right)\right]+(-1)=20-21\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1},$$

则 $$x_{2k}=x_{2k-1}=20-21\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{k-1}.$$

同理，运用下标换元的方式再得到点列$\{P_n\}$的横坐标数列$\{x_n\}$的通项公式是

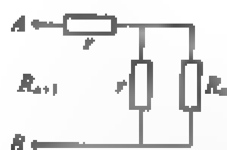
$$x_n=\frac{1-(-1)^n}{2}\left[20-21\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right]+\frac{1+(-1)^n}{2}\left[20-21\cdot\left(\frac{8}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}\right]$$

(2) 由于 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 20$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，故点列 $\{P_n\}$ 存在极限点，且此点的坐标是 $(20,0)$.

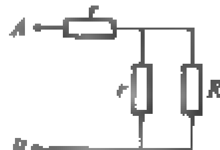
说明 点列 $\{P_n\}$ 是在 x 轴的上、下方来回摆动无限趋近于点 $(20,0)$.

17 (1) 由串并联电路电阻公式，得 $R_1 = 1 + 1 = 2$，由图(1)得

$$R_{n+1} = 1 + \frac{R_n}{1+R_n} = 2 - \frac{1}{1+R_n}.$$



(1)



(2)

第 17 题图

这是数列 $\{R_n\}$ 的递推公式. 下面求 $\{R_n\}$ 的通项公式.

由 $x = 2 - \frac{1}{1+x}$，得 $2 - x = \frac{1}{1+x}$，$x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$，$x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

又 $$R_{n+1} - x_1 = \frac{1}{1+x_1} - \frac{1}{1+R_n} = \frac{R_n - x_1}{(1+x_1)(1+R_n)}.$$

同理，$R_{n+1} - x_2 = \frac{R_n - x_2}{(1+x_2)(1+R_n)}$. 令 $y_n = \frac{R_n - x_1}{R_n - x_2}\ (n \in \mathbf{N}^*)$，

得 $$y_1 = \frac{R_1 - x_1}{R_1 - x_2} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}，y_{n+1} = \frac{R_{n+1} - x_1}{R_{n+1} - x_2} = \frac{1+x_2}{1+x_1} \cdot \frac{R_n - x_1}{R_n - x_2} = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}} y_n.$$

由此可知，$\{y_n\}$ 是公比 $q = \frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$，首项为 $\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}$ 的等比数列. 所以 $y_n = \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^n$，即 $\frac{R_n - x_1}{R_n - x_2} = q^n$ $(n \in \mathbf{N}^*)$，所以

$$R_n = \frac{x_1 - q^n x_2}{1 - q^n} = \frac{\frac{1+\sqrt{5}}{2} - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^n \times \frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1 - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}\right)^n} = \frac{(1+\sqrt{5})(3+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})(3-\sqrt{5})^n}{2[(3+\sqrt{5})^n - (\sqrt{3}-\sqrt{5})^n]}\ (n \in \mathbf{N}^*).$$

(2) 当网络变为无穷时的电阻 R 就是当 $n \to \infty$ 时 R_n 的极限. 因为 $0 < q < 1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$，因此，

$$R = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 - q^n x_2}{1 - q^n} = x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\Omega)$$

另一种解法如下：

由图(2)可知 $R = 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{R}} = 1 + \frac{R}{R+1}$，$R^2 - R - 1 = 0$. 解得 $R = \frac{1+\sqrt{5}}{2}(\Omega)$

18. 先证明一个极限等式：

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) = 0. \tag{1}$$



记 $T_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$b_n=\frac{1}{n}T_n$，则

$$T_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right) \tag{2}$$

由(2)式得，

$$T_{2^n}>1+\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{4}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=1+\frac{n}{2}, \tag{3}$$

以及

$$T_{2^n}<1+1+2\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{4}+\cdots+2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=1+n. \tag{4}$$

从(3)式和(4)式，有

$$1+\frac{n}{2}<T_{2^n}<n+1. \tag{5}$$

那么

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{n}{2}}{2^n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{T_{2^n}}{2^n}\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2^n}. \tag{6}$$

用数学归纳法，很容易证明当正整数 $n\geqslant 2$ 时，$n<2^{\frac{1}{2}(n+1)}$. (7)

那么，有 $0<\frac{n}{2^n}<\frac{1}{2^{\frac{1}{2}(n-1)}}$. (8)

令 $n\to\infty$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$. (9)

从(9)式及(6)式，立刻可以得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{T_{2^n}}{2^n}=0$. (10)

那么，有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2^n}=0$.

又

$$(n+1)b_{n+1}-nb_n=T_{n+1}-T_n=\frac{1}{n+1}, \tag{11}$$

则

$$n(b_{n+1}-b_n)=\frac{1}{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{n+1}(1-T_{n+1})<0. \tag{12}$$

那么，$b_{n+1}<b_n$，数列 $\{b_n\mid n\in \mathbf{N}\}$ 单调下降. 从而，结合 $\lim\limits_{n\to\infty}b_{2^n}=0$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$. 那么，得(1)式.

记

$$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n\ (n\in \mathbf{N}^*), \tag{13}$$

则 $S_{n+1}=S_n+a_{n+1}=S_n+\frac{1}{S_n}$. 那么 $S_{n+1}^2=S_n^2+2+\frac{1}{S_n^2}$. 于是，有

$$\begin{aligned}
S_n^2&=S_{n-1}^2+2+\frac{1}{S_{n-1}^2}\\
&=S_{n-2}^2+4+\left(\frac{1}{S_{n-2}^2}+\frac{1}{S_{n-1}^2}\right)\\
&=\cdots\\
&=S_1^2+2(n-1)+\left(\frac{1}{S_1^2}+\frac{1}{S_2^2}+\frac{1}{S_{n-1}^2}\right)\\
&=2(n-1)+\left(a_1^2+\frac{1}{a_1^2}\right)+\left(\frac{1}{S_2^2}+\cdots+\frac{1}{S_{n-1}^2}\right).
\end{aligned} \tag{14}$$



从(14)式，对于任意正整数 n，有 $S_n^2>2(n-1)$ (15)

从(15)式和(14)式，有

$$S_n^2<2(n-1)+\left(a_1^2+\frac{1}{a_1^2}\right)+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-2}\right) \quad (16)$$

从(15)式和(16)式，有

$$2\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}S_n^2<2\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{n}\left(a_1^2+\frac{1}{a_1^2}\right)+\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-2}\right) \quad (17)$$

由(1)式有 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n-2}\right)=0. \quad (18)$$

显然 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=2$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(a_1^2+\frac{1}{a_1^2}\right)=0$

那么 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}S_n^2=2 \quad (19)$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}a_n=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\frac{1}{S_{n-1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-1}}\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n-1}}{S_{n-1}}=\frac{\sqrt{2}}{2} \quad (20)$$

第3讲 递推数列与函数



第1题图

1. D 因为 $a_n=\frac{n-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}=1+\frac{\sqrt{98}-\sqrt{97}}{n-\sqrt{98}}$，由图可知选D。

2. B $\overrightarrow{PQ}=(2,a_{n+2}-a_n)=(2,2d)$，由 $S_2=2a_1+d=10$，$S_4=4a_1+(1+2+3)d=36$，可得 $d=4$。所以 $\overrightarrow{PQ}=(2,8)$，与它一致的一个方向向量为 $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$，选B。

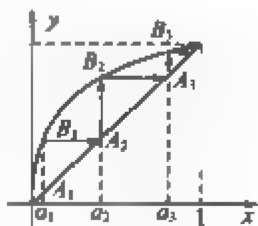
3. B 由于 $\{a_n\}$ 是递增数列，所以

$$3-a>0, a>0, \quad (1)$$

即 $$1<a<3, f(7)<f(8), \quad (2)$$

即 $7(3-a)-3<a^2$，解得 $a>2$ 或 $a<-9$，联立(1)式，(2)式，得 $2<a<3$，选B。

4. A 如图，过点 $(a_1,0)$ 作与 y 轴平行的直线交曲线于点 B_1，过点 B_1 作与 x 轴平行的直线交直线 $y=x$ 于点 A_2，此时，由于 B_1 的纵坐标是 a_2，从而 A_2 的横坐标是 a_2，按此方式不断进行（以后的作图方法与此类似，不再赘述）则得到一单调递增的收敛数列 $\{a_n\}$，如图知：$a_{n+1}>a_n$ $(n\in\mathbf{N}^*)$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$，用同样的方法可说明B，C，D是错误的，故选A。



第4题图

5. $f(x)=\frac{x^2-x-2}{2}\lg a$。由 $f(x-1)=f(x)-\lg a^{x-1}$ 得 $f(x)-f(x-1)=\lg a^{x-1}$，$f(x-1)-f(x-2)=\lg a^{x-2}$，…，$f(2)-f(1)=\lg a^1$，将上式叠加得 $f(x)-f(1)=[1+2+3+\cdots+(x-1)]\lg a$，故 $f(x)=\frac{x^2-x-2}{2}\lg a$



6. 1 当 $x\geqslant n$ 时,通过归纳可得 $f_n(x)=n-x$,故有 $f_{2007}(2008)=2007-2008=-1$

7. $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$,$\left(\frac{5}{3},1\right)$,$\left(\frac{5}{4},1\right)$,$\left(\frac{5}{2003}\right)$,$\left(\frac{3}{2003}\right)$. 解由 $y=3-0.6x$ 和 $y=0.6x$ 组成的方程组得 P_1 的坐标 $\left(\frac{5}{2},\frac{3}{2}\right)$,则过点 $(0,3)$ 和点 $\left(\frac{5}{2},0\right)$ 的直线方程为 $\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{3}=1$,解由 $\frac{x}{\frac{5}{2}}+\frac{y}{3}=1$ 和 $y=0.6x$ 组成的方程组得 P_2 的坐标 $\left(\frac{5}{3},1\right)$,则过点 $(0,3)$ 和点 $\left(\frac{5}{3},0\right)$ 的直线方程为 $\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{3}=1$,解由 $\frac{x}{\frac{5}{3}}+\frac{y}{3}=1$ 和 $y=0.6x$ 组成的方程组得 P_3 的坐标为 $\left(\frac{5}{4},1\right)$,则由点 P_1,P_2,P_3 的坐标归纳猜想得 P_{2002} 的坐标为 $\left(\frac{5}{2003},\frac{3}{2003}\right)$.

8. $\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$. 若令 $b_n=f_n(2)$,则此题变为:$b_1=\frac{2}{3}$ 且 $b_{n+1}=\frac{2}{b_n+1}$,$n\in\mathbf{N}^*$,记 $a_n=\frac{b_n-1}{b_n+2}$,求 a_{10} 的值

这会比原题更容易理解.下面来求解.

将条件与结论结合起来可发现,由 $b_{n+1}=\frac{2}{b_n+1}$ 得 $\begin{cases}b_{n+1}-1=\dfrac{-(b_n-1)}{b_n+1},\\ b_{n+1}+2=\dfrac{2(b_n+2)}{b_n+1},\end{cases}$

于是有
$$\frac{b_{n+1}-1}{b_{n+1}+2}=\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{b_n-1}{b_n+2}\cdots\frac{b_n-1}{b_n+2}=\frac{b_1-1}{b_1+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

因为 $b_1=\frac{2}{3}$,所以,$a_{10}=\frac{b_{10}-1}{b_{10}+2}=\frac{b_1-1}{b_1+2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{10-1}=\left(-\frac{1}{2}\right)^{10}$.

9. (1) 设 $f(x)=ax^2+bx$,则由 $f'(x)=6x-2$,立即知 $2a=6$,$a=3$,$b=-2$,所以 $f(x)=3x^2-2x$,$S_n=3n^2-2n$,易得 $a_n=6n-5(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由(1)知
$$b_n=\frac{3}{(6n-5)(6n+1)}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right),$$

则得
$$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n+1}\right)=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right).$$

那么,对所有 $n\in\mathbf{N}^*$,$T_n=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)<\frac{m}{20}$ 恒成立.又 $\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{6n+1}\right)<\frac{1}{2}$,所以 $\frac{m}{20}\geqslant\frac{1}{2}$,$m\geqslant 10$,所求最小正整数 m 为 10.

10. (1) 因为 $\frac{|A_nA_{n+1}|}{|A_{n-1}A_n|}=\frac{1}{3}$,且 $|A_1A_2|=10-1=9$,

所以
$$|A_nA_{n+1}|=|A_1A_2|\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=9\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}$$

(2) 由(1)得 $|A_1A_2|+|A_2A_3|+\cdots+|A_{n-1}A_n|=9+3+1+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}=\frac{27}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$,



所以点 A_n 的坐标 $\left(0,\frac{27}{2}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}\right)$。因为 $|OB_n|-|OB_{n-1}|=2\sqrt{2}$ 且 $|OB_1|=3\sqrt{2}$

所以 $\{|OB_n|\}$ 是以 $3\sqrt{2}$ 为首项，$2\sqrt{2}$ 为公差的等差数列，$|OB_n|=3\sqrt{2}+(n-1)2\sqrt{2}=(2n+1)\sqrt{2}$。所以 B_n 的坐标为 $(2n+1,2n+1)$。

(3) 连接 A_nB_{n+1}，设四边形 $A_nA_{n+1}B_{n+1}B_n$ 的面积为 S_n，则

$$S_n=S_{\triangle A_nA_{n+1}B_{n+1}}+S_{\triangle B_nB_{n+1}A_n}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{3}\right)^{n-3}\right]\cdot(2n+3)+\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\left[\frac{29}{2}-\frac{27}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right]\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{29}{2}+\frac{9n}{3^n},$$

所以 $S_{n+1}-S_n=\frac{3-6n}{3^{n+1}}<0$，即 $S_{n+1}<S_n$，故 $\{S_n\}$ 单调递减

所以 S_n 的最大值 $S_1=\frac{29}{2}+9=\frac{47}{2}$。

11. (1) 由题设，$x_{n+2}=\frac{x_n+\lambda x_{n+1}}{1+\lambda}$，所以，$x_{n+2}-x_{n+1}=\frac{x_n-x_{n+1}}{1+\lambda}$，$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{x_{n+2}-x_{n+1}}{x_{n+1}-x_n}=-\frac{1}{1+\lambda}=q$，

又 $a_0=x_1-x_0=1$，$x_2=\frac{\lambda}{1+\lambda}$，所以 $a_1=x_2-x_1=\frac{\lambda}{1+\lambda}-1=\frac{-1}{1+\lambda}$，所以 $a_n=\left(-\frac{1}{1+\lambda}\right)^n$。

(2) $x_n=x_0+(x_1-x_0)+(x_2-x_1)+\cdots+(x_n-x_{n-1})=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}$

$$=\frac{1\times\left[1-\left(-\frac{1}{1+\lambda}\right)^n\right]}{1-\left(-\frac{1}{1+\lambda}\right)}=\frac{(1+\lambda)\left[1-\left(-\frac{1}{1+\lambda}\right)^n\right]}{\lambda+2},$$

因为 $\lambda>0$，所以 $\left|-\frac{1}{1+\lambda}\right|<1$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\frac{\lambda+1}{\lambda+2}$，所以当 $\lambda>0$ 时，

$$f(\lambda)=\frac{(\lambda+2)-1}{\lambda+2}=1-\frac{1}{\lambda+2}\in\left(\frac{1}{2},1\right).$$

12. (1) 由题意，$a_n=n+\frac{1}{2}$，所以 $b_n=2000\left(\frac{a}{10}\right)^{n+\frac{1}{2}}$。

(2) 因为 $y=2000\left(\frac{a}{10}\right)^x(0<a<10)$ 递减，故对每个正整数 n，有 $b_n>b_{n+1}>b_{n+2}$，于是，以 b_n，b_{n+1}，b_{n+2} 为边长能构成一个三角形的充要条件是 $b_{n+2}+b_{n+1}>b_n$，化简后即为 $\left(\frac{a}{10}\right)^2+\frac{a}{10}-1>0$，解得 $a<-5(1+\sqrt{5})$ 或 $a>5(\sqrt{5}-1)$。由于 $0<a<10$，故得 $5(\sqrt{5}-1)<a<10$。

(3) 满足(2)的最小整数 $a=7$，于是，$b_n=2000\left(\frac{7}{10}\right)^{n+\frac{1}{2}}$

数列 $\{b_n\}$ 是一个递减的正数数列，对每个正整数 $n\geqslant 2$，有递推关系式 $B_n=b_nB_{n-1}$，于是，当 $b_n\geqslant 1$ 时，$B_n\geqslant B_{n-1}$；当 $b_n<1$ 时，$B_n<B_{n-1}$。

因此，数列 $\{B_n\}$ 的最大项的项数满足不等式 $b_n\geqslant 1$ 且 $b_{n+1}<1$，解不等式 $b_n=2000\left(\frac{7}{10}\right)^{n+\frac{1}{2}}\geqslant 1$，得 $n\leqslant 20.8$，所求项数 $n=20$。



13. (1) 由题意，得 $P_{n-1}P_n=(n-1)P_nP_{n+1}$，令 $n=2$，$P_1P_2=P_2P_3$，所以 $a_2=1$，令 $n=3$，$P_2P_3=2P_3P_4$，所以 $a_3=\frac{1}{2}$，同理 $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\frac{1}{n-1}$，所以

$$a_n=\frac{1}{n-1}a_{n-1}=\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}a_{n-2}=\cdots=\frac{1}{(n-1)!}(n\geqslant 2).$$

(2) $a_1+a_2+\cdots+a_n=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}$$

$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}=3-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}<3(n\geqslant 3).$$

当 $n=1,2$ 时，显然成立.

(3) 假设有两个点 $A(p,a_p)$，$B(q,a_q)$（$p\neq q$，$p,q\in \mathbf{N}^*$ 且 $p>2,q>2$），都在函数 $y=\frac{k}{(x-1)^2}$ 上，即 $a_p=\frac{k}{(p-1)^2}$，$a_q=\frac{k}{(q-1)^2}$，所以 $\frac{(p-1)^2}{(p-1)!}=\frac{(q-1)^2}{(q-1)!}$.

研究数列 $\{b_n\}$，$b_n=\frac{n^2}{n!}$ 的单调性，$b_n-b_{n-1}=\frac{n^2}{n!}-\frac{(n-1)^2}{(n-1)!}=-\frac{n^2-3n+1}{(n-1)!}$.

当 $n>2$ 时，$n^2-3n+1>0$，则 $b_n<b_{n-1}$，所以，数列 $\{b_n\}$ 是递减数列，则 $\frac{(p-1)^2}{(p-1)!}=\frac{(q-1)^2}{(q-1)!}$ 不可能成立，因此，函数 $y=\frac{k}{(x-1)^2}$ 的图像上不可能存在满足题意的两点.

14. (1) 由题意可知 $Q_1(1,1)$，$P_1\left(1,\frac{2}{3}\right)$，$Q_2\left(\frac{3}{2},\frac{2}{3}\right)$.

(2) 因为 $Q_n(x_n,y_n)$，$Q_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$，所以点 P_n 的坐标为 (x_n,y_{n+1}).

因为 Q_n，Q_{n+1} 在曲线上 C 上，所以 $y_n=\frac{1}{x_n}$，$y_{n+1}=\frac{1}{x_{n+1}}$，又点 P_n 在曲线 C_n 上，$y_{n+1}=\frac{1}{x_n+2^{-n}}$，所以 $x_{n+1}=x_n+2^{-n}$，所以 $a_n=2^{-n}$.

(3) $x_n=(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+\cdots+(x_2-x_1)+x_1$

$$=2^{-(n-1)}+2^{-(n-2)}+\cdots+2^{-1}+1=1\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}=2-2^{1-n}$$

所以 $a_n\cdot b_n=(x_{n+1}-x_n)\cdot(y_n-y_{n+1})=2^{-n}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_{n+1}}\right)$

$$=2^{-n}\left(\frac{1}{2-2^{1-n}}-\frac{1}{2-2^{-n}}\right)=\frac{1}{(2\cdot 2^n-2)\cdot(2\cdot 2^n-1)}.$$

因为 $2\cdot 2^n-2\geqslant 2^n$，$2\cdot 2^n-1\geqslant 3$，所以 $a_n\cdot b_n\leqslant\frac{1}{3\cdot 2^n}$.



$$S_n = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n \leqslant \frac{1}{3\cdot 2} + \frac{1}{3\cdot 2^2} + \cdots + \frac{1}{3\cdot 2^n}$$

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2^n}\right) < \frac{1}{3}$$

15. (1) 由 $\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}$，得 $x_1+x_2=1$，则

$y_1+y_2=\frac{1}{4^{x_1}+2}+\frac{1}{4^{x_2}+2}=\frac{(4^{x_2}+2)+(4^{x_1}+2)}{4^{x_1+x_2}+2\cdot 4^{x_1}+2\cdot 4^{x_2}+4}=\frac{4^{x_1}+4^{x_2}+4}{2(4^{x_1}+4^{x_2}+4)}=\frac{1}{2}$，

故点 P 的纵坐标 $\frac{y_1+y_2}{2}=\frac{1}{4}$ 是定值.

(2) 已知 $S_m=a_1+a_2+\cdots+a_{m-1}+a_m=f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{2}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f(1)$

又 $S_m=a_{m-1}+a_{m-2}+\cdots+a_1+a_m=f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f\left(\frac{m-2}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{1}{m}\right)+f(1)$

两式相加，得

$2S_m=\left[f\left(\frac{1}{m}\right)+f\left(\frac{m-1}{m}\right)\right]+\left[f\left(\frac{2}{m}\right)+f\left(\frac{m-2}{m}\right)\right]+\cdots+\left[f\left(\frac{m-1}{m}\right)+f\left(\frac{1}{m}\right)\right]+2f(1)$

因为 $\frac{k}{m}+\frac{m-k}{m}=1(k=1,2,\cdots,m-1)$，所以 $f\left(\frac{k}{m}\right)+f\left(\frac{m-k}{m}\right)=\frac{1}{2}$，又 $f(1)=\frac{1}{6}$，故 $S_m=\frac{1}{12}(3m-1)$.

(3) 由 $\frac{t^m}{S_m}<\frac{t^{m+1}}{S_{m+1}}$，得

$$12t^m\left(\frac{1}{3m-1}-\frac{t}{3m+2}\right)<0. \quad (1)$$

依题意，(1) 式对任意 $m\in \mathbf{N}^*$ 恒成立，显然 $t\neq 0$.

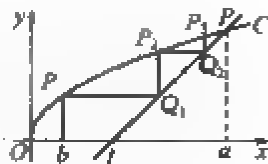
① 当 $t<0$ 时，由 $\frac{1}{3m-1}-\frac{t}{3m+2}>0$，得 $t^m<0$，而当 m 为偶数时，$t^m<0$ 不成立，所以 $t<0$ 不合题意.

② 当 $t>0$ 时，因为 $t^m>0$，则由 (1) 式得 $t>\frac{3m+2}{3m-1}=1+\frac{3}{3m-1}$.

又 $\frac{3}{3m-1}$ 随 m 的增大而减小，所以当 $m=1$ 时，$1+\frac{3}{3m-1}$ 有最大值 $\frac{5}{2}$，故 $t>\frac{5}{2}$.

16. 如图所示，(1) 由于点 P 在直线 l 上，则 $\sqrt{a}=a-c$，解得正数 $a=\frac{1+2c+\sqrt{1+4c}}{2}>c$. 由于 $c\geqslant 0$，则 $a\geqslant\frac{1}{2}(1+0+\sqrt{1+0})=1$，故 $a\geqslant 1$.

(2) 由 $P_1(b,\sqrt{b})$ 得 $Q_1(c+\sqrt{b},\sqrt{b})$，则 $P_2(c+\sqrt{b},\sqrt{c+\sqrt{b}})$，则 $x_2-x_1=c+\sqrt{b}-b=a-\sqrt{a}+\sqrt{b}-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b}-1)>0$，则 $x_2>x_1$.



第 16 题图



下面用数学归纳法证明 $x_n < a$. ① 当 $n=1$ 时，$x_1 = b < a$；② 假设当 $n=k\in \mathbf{N}^*$ 时，$x_k<a$，则当 $n=k+1$ 时，$x_{k+1} = c+\sqrt{x_k} < (a-\sqrt{a})+\sqrt{a} = a$. 综合①，②知，$x_n<a$.

(3) 由于 $c=0$，则由(1)得 $a=1$. 类似于(2)得，$x_{k+1} = c+\sqrt{x_k} = (x_k)^{\frac12}$，则 $x_k = (x_{k-1})^{\frac12} = (x_{k-2})^{\frac14} = (x_{k-3})^{\frac18} = \cdots = (x_1)^{\frac{1}{2^{k-1}}} = b^{\frac{1}{2^{k-1}}}$.

又因为 $b\geqslant\frac12$，则 $x_{k+1} = b^{\frac{1}{2^k}} \geqslant \left(\frac12\right)^{\frac{1}{2^k}} \geqslant \left(\frac12\right)^{\frac12}$，$\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{x_{k+1}-x_k}{x_{k+1}} \leqslant 2^{\frac12}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n} (x_{k+1}-x_k)$

$$=2^{\frac12}\cdot(x_{n+1}-x_1) < 2^{\frac12}(1-x_1)$$

$$=2^{\frac12}(1-b)\leqslant 2^{\frac12}\left(1-\frac12\right)\leqslant\frac{\sqrt2}{2}.$$

说明 类似于 $x_2>x_1$ 可证 $x_{n+1}>x_n$，于是得 $x_1<x_2<x_3<\cdots<x_n<x_{n+1}<\cdots<a$，可知点列 $\{P_n\}$ 沿曲线 C 向右无限趋近于点 $P(a,\sqrt{a})$.

17 (1) 曲线 C 上点 $P_n(x_n,y_n)$ 处的切线 l_n 的斜率为 $k_n = y'|_{x=x_n} = 3x_n^2$，故得到 l_n 的方程为 $y-y_n=3x_n^2(x-x_n)$，联立方程 $\begin{cases} y=x^3, \\ y-y_n=3x_n^2(x-x_n), \\ y_n=x_n^3. \end{cases}$ 消去 y 得 $x^3-3x_n^2x+2x_n^3=0$

化简得 $(x-x_n)^2(x+2x_n)=0$，所以 $x=x_n$ 或 $x=-2x_n$.

由 $x=x_n$ 得到 P_n 点坐标 (x_n,y_n)，由 $x=-2x_n$ 就得到 P_{n+1} 点坐标 $(-2x_n,(-2x_n)^3)$，所以 $x_{n+1}=-2x_n$，$y_{n+1}=(-2x_n)^3$. 故数列 $\{x_n\}$ 为等比数列，其首项为1，公比为 -2，$x_n=(-2)^{n-1}$，$y_n=(-8)^{n-1}$.

(2) 由(1)知 $P_{n+1}((-2)^n,(-8)^n)$，$P_{n+2}((-2)^{n+1},(-8)^{n+1})$.

直线 l_n 的方程为 $y-(-8)^n = \frac{(-8)^n-(-8)^{n+1}}{(-2)^n-(-2)^{n+1}}[x-(-2)^n]$. 化简得 $3\cdot4^n x - y - 2\cdot(-8)^n=0$.

$$d_n = \frac{|3\cdot4^n\cdot(-2)^{n-1}-(-8)^{n-1}-2\cdot(-8)^n|}{\sqrt{(3\cdot4^n)^2+(-1)^2}}$$

$$=\frac{27\cdot8^{n-1}}{\sqrt{9\cdot4^{2n}+1}} < \frac{27\cdot8^{n-1}}{3\cdot2^{2n}} = 9\cdot2^{n-3}.$$

所以 $\frac{1}{d_n} > \frac19\cdot\left(\frac12\right)^{n-3}$，$\frac{1}{d_1}+\frac{1}{d_2}+\cdots+\frac{1}{d_n} > \frac19\left[\left(\frac12\right)^{-2}+\left(\frac12\right)^{-1}+\cdots+\left(\frac12\right)^{n-3}\right]$

$$=\frac19\cdot\frac{\left(\frac12\right)^{-2}\left[1-\left(\frac12\right)^n\right]}{1-\frac12}=\frac89\left(1-\frac{1}{2^n}\right)$$

18. (1) 将点 $A_n(a_n,\sqrt{a_{n+1}})$ 代入 $y^2=x+1$ 中，得 $a_{n+1}=a_n+1$，即 $a_{n+1}-a_n=d=1$，所以 $a_n=a_1+(n-1)\cdot1=n+5$. 又过点$(0,1)$，方向向量为$(1,2)$的直线方程为 $y=2x+1$，所以 $b_n=2n+1$.

(2) 由(1)得 $f(n)=\begin{cases} n+5, & n\text{为奇数}, \\ 2n+1, & n\text{为偶数}. \end{cases}$



① 当 k 为偶数时，$k+27$ 为奇数，又因为 $f(k+27)=4f(k)$，所以 $k+27+5=4(2k+1)$，得 $k=4$；

② 当 k 为奇数时，$k+27$ 为偶数，所以 $2(k+27)+1=4(k+5)$，得 $k=\frac{35}{2}$（舍去）。综上所述，存在唯一的 $k=4$ 符合条件。

(3) 由
$$\frac{a^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)}-\frac{a^n}{\sqrt{n-2+a_n}}\leqslant 0,$$

得 $a\leqslant\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$。记 $f(n)=\frac{1}{\sqrt{2n+3}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)$，

则
$$f(n+1)=\frac{1}{\sqrt{2n+5}}\left(1+\frac{1}{b_1}\right)\left(1+\frac{1}{b_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{b_n}\right)\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right).$$

故
$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}\cdot\left(1+\frac{1}{b_{n+1}}\right)=\frac{\sqrt{2n+3}}{\sqrt{2n+5}}\cdot\frac{2n+4}{2n+3}$$
$$=\frac{2n+4}{\sqrt{2n+5}\cdot\sqrt{2n+3}}=\frac{\sqrt{4n^2+16n+16}}{\sqrt{4n^2+16n+15}}>1.$$

因此 $f(n+1)>f(n)$，即 $f(n)$ 递增，于是 $f(n)_{\min}=f(1)=\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{4}{3}=\frac{4\sqrt{5}}{15}$，所以 $0<a\leqslant\frac{4\sqrt{5}}{15}$。

第4讲　多元递推

1. C　当 $n=1$ 时，$C_1=A_1\cdot B_1$；当 $n\geqslant 2$ 时，$C_n=(A_n-A_{n-1})\cdot B_n+(B_n-B_{n-1})\cdot A_n-(A_n-A_{n-1})\cdot(B_n-B_{n-1})=A_n\cdot B_n-A_{n-1}\cdot B_{n-1}$，所以 $C_1+C_2+C_3+\cdots+C_n=A_1\cdot B_1+(A_2\cdot B_2-A_1\times B_1)+(A_3\cdot B_3-A_2\cdot B_2)+\cdots+(A_n\cdot B_n-A_{n-1}\cdot B_{n-1})=A_n\cdot B_n$。

2. C　根据等差数列的性质，可知
$$\frac{a_6}{b_6}=\frac{2a_6}{2b_6}=\frac{a_1+a_{11}}{b_1+b_{11}}=\frac{\frac{11}{2}(a_1+a_{11})}{\frac{11}{2}(b_1+b_{11})}=\frac{S_{11}}{T_{11}}=\frac{3\times 11-3}{2\times 11+3}=\frac{6}{5}$$

故选 C。

3. A　由 $a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}$，$b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$，故 $a_n+\sqrt{2}b_n=(\sqrt{2}+1)(a_{n-1}+\sqrt{2}b_{n-1})$，且 $a_n-\sqrt{2}b_n=(1-\sqrt{2})[a_{n-1}-\sqrt{2}b_{n-1}]$，于是 $a_n^2-2b_n^2=-(a_{n-1}^2-2b_{n-1}^2)(n\geqslant 1)$，故 $a_n^2-2b_n^2=(a_0^2-2b_0^2)(-1)^n=(-1)^{n+1}$，所以 $a_{2007}^2-2b_{2007}^2=(-1)^{2008}=1$。

4. A　$f(x,x+y)=\frac{x+y}{y}f(x,y)$，$f(x,z)=\frac{z}{z-x}f(x,z-x)$ 因此，

$$f(14,52)=\frac{52}{52-14}f(14,52-14)=\frac{52}{38}f(14,38)$$
$$=\frac{52}{38}\cdot\frac{38}{24}f(14,24)=\frac{52}{38}\cdot\frac{38}{24}\cdot\frac{24}{10}f(14,10)=\frac{52}{10}f(14,10)$$



$$f(14,10)=f(10,14)=\frac{14}{4}f(10,4)=\frac{7}{2}f(4,10)=\frac{7}{2}\cdot\frac{10}{6}f(4,6)$$

$$=\frac{7}{2}\cdot\frac{10}{6}\cdot\frac{6}{2}f(4,2)=\frac{35}{2}f(2,4)=\frac{35}{2}\cdot\frac{4}{2}f(2,2)=35\times 2=70$$

所以 $f(14,52)=\frac{52}{10}\times 70=364$，选 A.

5. 2007. 因为 $b_n=\frac{1}{2}(a_n+a_{n+1})$，所以 $a_{n+2}+2a_{n+1}-3a_n=0$.

由特征根法得 $$a_n=\frac{2007+b_1}{2}+\frac{b_1-2007}{6}(-3)^n.$$

若对于任意正整数 n，均有 $a_n>0$，则一定有 $b_1=2007$

6. $3\cdot 2^{88}$　各行数的个数构成一个等差数列，前 9 行共有 $S_9=\frac{9(9-1)}{2}\times 2+9\times 1=81$ 项，所以 $A(10,8)$ 是数列 $\{a_n\}$ 中的第 89 项. $A(10,8)=3\cdot 2^{88}$.

7. $2n-n^2(n\in N^*)$，$3n-n^2(n\in N^*)$. 由题给递推式得

$a_{n+2}=3a_{n+1}-2b_{n+1}=3a_{n+1}-2(2a_n-b_n)=3a_{n+1}-4a_n+2b_n=3a_{n+1}-4a_n+(3a_n-a_{n+1})$.

所以 $$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n(n\in N^*),\tag{1}$$

同理可得 $$b_{n+2}=2b_{n+1}-b_n(n\in N^*).\tag{2}$$

(1)、(2) 两式的特征方程均为 $x^2=2x-1$，解之得 $x_1=x_2=1$

故可令 $a_n=(A+Bn)x_1^n=A+Bn(n\in N^*)$，$b_n=(A'+B'n)x_1^n=A'+B'n(n\in N^*)$. 因为 $a_1=1$，$b_1=2$，所以 $a_2=3a_1-2b_1=-1$，$b_2=2a_1-b_1=0$. 故由 $\begin{cases}A+B=1\\A+2B=-1\end{cases}$ 得 $A=3$，$B=-2$；由 $\begin{cases}A'+B'=2\\A'+2B'=0\end{cases}$ 得 $A'=4$，$B'=-2$. 所以 $a_n=3-2n(n\in N^*)$，$b_n=4-2n(n\in N^*)$. 易求得 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 的前 n 项和分别为：

$$A_n=3n-2(1+2+\cdots+n)=3n-2(n+1)=2n-n^2(n\in N^*),$$

$$B_n=4n-2(1+2+\cdots+n)=4n-n(n+1)=3n-n^2(n\in N^*).$$

另一种解法如下：令 $n=1,2,\cdots,n$，将 n 个递推方程相加，将递推方程组直接化为关于 A_n，B_n 的递推方程组，再求 A_n，B_n，证明略.

8. $\frac{n(n+1)}{2}$，$\frac{(n+1)^2}{2}$　由已知得 $\begin{cases}2b_n=a_n+a_{n+1} & (1)\\a_{n+1}^2=b_n\cdot b_{n+1} & (2)\end{cases}$

因为 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是正项数列，由(1)式，(2)式消去 a_n，a_{n+1} 得 $2b_n=\sqrt{b_{n-1}b_n}+\sqrt{b_nb_{n+1}}(n\geqslant 2)$，即 $2\sqrt{b_n}=\sqrt{b_{n-1}}+\sqrt{b_{n+1}}(n\geqslant 2)$，故数列 $\{\sqrt{b_n}\}$ 是等差数列. 因 $a_1=1$，$b_1=2$，$a_2=3$，所以 $b_2=\frac{9}{2}$，所以 $\sqrt{b_n}=\sqrt{2}+(n-1)\cdot\left(\sqrt{\frac{9}{2}}-\sqrt{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}(n+1)$，故 $b_n=\frac{(n+1)^2}{2}$，$a_n=\sqrt{b_{n-1}b_n}=\frac{n(n+1)}{2}$.



另一种解法如下：根据条件 $a_{n+1}=2b_n-a_n$，$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}^2}{b_n}$，且 $a_1=1$，$b_1=2$，得 $a_2=3$，$b_2=\frac{9}{2}$，$a_3=6$，$b_3=8$；$a_4=10$，$b_4=\frac{25}{2}$。猜想：$a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$b_n=\frac{(n+1)^2}{2}$。

证明：① 当 $n=1$ 时，$a_1=1$，$b_1=2$，猜想成立；

② 假设 $n=k(k\in\mathbf{N})$ 时猜想成立，即 $a_k=\frac{k(k+1)}{2}$，$b_k=\frac{(k+1)^2}{2}$。由 $a_{k+1}=2b_k-a_k=\frac{(k+1)(k+2)}{2}$，$b_{k+1}=\frac{a_{k+1}^2}{b_k}=\frac{(k+2)^2}{2}$，得 $n=k+1$ 时猜想也成立。

根据①②可知，$n\in\mathbf{N}$ 时猜想成立，即 $a_n=\frac{n(n+1)}{2}$，$b_n=\frac{(n+1)^2}{2}$。

9. 考虑这两个数列中前几项被 8 除所得的余数，有

$\{x_n(\mathrm{mod}\ 8)\}$：1，1，3，5，3，5，…，$\{y_n(\mathrm{mod}\ 8)\}$：1，7，1，7，1，7，…

用数学归纳法易证 $\{x_n(\mathrm{mod}\ 8)\}$ 是从第 3 项起周期为 2 的混周期数列，$\{y_n(\mathrm{mod}\ 8)\}$ 是周期为 2 的纯周期数列。

因为 $x_n\neq y_n$，当 $n\geqslant 2$ 时，$\{x_n(\mathrm{mod}\ 8)\}$ 与 $\{y_n(\mathrm{mod}\ 8)\}$ 没有相同的项，所以，除第 1 项"1"以外，$\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 中没有相同的项。

10. (1) 经过 n 次操作后，A 中浓度为 $a_n\%=\frac{200a_{n-1}\%+100b_{n-1}\%}{300}$，

即
$$a_n=\frac{2}{3}a_{n-1}+\frac{1}{3}b_{n-1} \tag{1}$$

同理
$$b_n=\frac{1}{3}a_{n-1}+\frac{2}{3}b_{n-1} \tag{2}$$

由(1)式+(2)式得 $a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}(n\in\mathbf{N})$，其中 $a_0=12$，$b_0=6$。所以 $\{a_n+b_n\}$ 是常数数列，故 $a_n+b_n=a_0+b_0=12+6=18$（定值）。

(2) 由(1)式−(2)式得：$a_n-b_n=\frac{1}{3}(a_{n-1}-b_{n-1})(n\in\mathbf{N})$。所以 $\{a_n-b_n\}$ 是首项为 $a_0-b_0=6$，公比为 $\frac{1}{3}$ 的等比数列。所以 $a_n-b_n=6\left(\frac{1}{3}\right)^n$，可求出：$a_n=9+\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$，$b_n=9-\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}(n\in\mathbf{N})$。

由已知 $a_n-b_n\leqslant\frac{1}{15}$，即 $\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\leqslant\frac{1}{30}$，有 $n-1\geqslant\frac{\lg 30}{\lg 3}$。因此，$n\geqslant 1+\frac{1+0.4771}{0.4771}\approx 4.09$，故大约经过 5 次操作后可满足要求。

11. 设 a_n 表示从 O 到 O 的长度为 n 的路径条数，b_n 表示从 A 到 O 长度为 n 的路径条数，则有 $\begin{cases}a_n=6b_{n-1}\\ b_n=a_{n-1}+2b_{n-1}\end{cases}$ 对任何正整数 n 成立。通过代换和化简可得：$a_{n+2}-2a_{n+1}-6a_n=0$。其特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-6=0$，$\lambda=1\pm\sqrt{7}$。

令 $a_n=A(1+\sqrt{7})^n+B(1-\sqrt{7})^n$，其中 A、B 为待定常数。利用初始条件 $a_0=1$，$a_1=0$，可得

$$\begin{cases}1=A+B,\\ 0=(1+\sqrt{7})A+(1-\sqrt{7})B,\end{cases}\quad 所以\begin{cases}A=\frac{7-\sqrt{7}}{14},\\ B=\frac{7+\sqrt{7}}{14},\end{cases}$$



所以 $$a_n=\frac{1}{14}[(7-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})^n+(7+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})^n].$$

所以 $$a_{2003}=\frac{1}{14}[(7-\sqrt{7})(1+\sqrt{7})^{2003}+(7+\sqrt{7})(1-\sqrt{7})^{2003}].$$

说明 利用递推方法解题的关键是根据题设建立递推关系式,特别要注意设“元”的技巧.有时为了解题方便,设置多个变元,但求解时要消去其余变元,只能留下一个主变元.

12 由 $x_1=3$,$y_1=1$ 和递推关系式,可得 $x_2=\frac{5}{2}$,$y_2=0$;$x_3=\frac{9}{4}$,$y_3=-\frac{1}{2}$.

假设存在实数 t,能使 $\{x_n+ty_n\}$ 成为等比数列,则需满足 $(x_1+ty_1)(x_3+ty_3)=(x_2+ty_2)^2$,即 $\left(\frac{9}{4}-\frac{1}{2}t\right)(3+t)=\left(\frac{5}{2}\right)^2$,整理得 $2t^2-3t-2=0$,故 $t=2$ 或 $t=-\frac{1}{2}$.

公比 $q=\frac{\frac{5}{2}}{3+t}=\frac{5}{2(3+t)}$.当 $t=2$ 时,$q=\frac{1}{2}$;当 $t=-\frac{1}{2}$ 时,$q=1$.

利用题设递推式,可以证明

$$\frac{x_{n+1}+2y_{n+1}}{x_n+2y_n}=\frac{\left(\frac{9}{10}x_n-\frac{1}{5}y_n\right)+2\left(-\frac{1}{5}x_n+\frac{3}{5}y_n\right)}{x_n+2y_n}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{x_{n+1}-\frac{1}{2}y_{n+1}}{x_n-\frac{1}{2}y_n}=\frac{\left(\frac{9}{10}x_n-\frac{1}{5}y_n\right)-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{5}x_n+\frac{3}{5}y_n\right)}{x_n-\frac{1}{2}y_n}=1$$

所以,存在 $t=2$ 或 $-\frac{1}{2}$,能使 $\{x_n+ty_n\}$ 成为等比数列.

13 (1) 由递推关系式,只需证明:在任何一步所得到的三个数中都不可能出现1或-1.假设 $x_{n+1}=1$,则 $x_n^2-1=2x_n$,即 $x_n^2-2x_n-1=0$,从而 x_n 为无理数,这不可能;假设 $x_{n+1}=-1$,则 $x_n^2-1=-2x_n$,$x_n^2+2x_n-1=0$,x_n 也为无理数,这也不可能.所以 $x_{n+1}\neq\pm1$.同理 $y_{n+1}\neq\pm1$,$z_{n+1}\neq\pm1$.

(2) 由 x_1,y_1,$z_1\neq0$ 及递推关系式知,对于任意 $n\in\mathbf{N}^*$,x_n,y_n,$z_n\neq0$,$x_ny_nz_n\neq0$.

下面用数学归纳法证明:

$$x_n+y_n+z_n=x_ny_nz_n. \tag{1}$$

当 $n=1$ 时,显然有 $x_1+y_1+z_1=x_1y_1z_1=\frac{48}{7}$.

假设当 $n=k$ 时,等式(1)成立,即 $x_k+y_k+z_k=x_ky_kz_k$.

令 $x_k=\tan\alpha$,$y_k=\tan\beta$,$z_k=\tan\gamma\left(\alpha,\beta,\gamma\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)\right)$,则 $\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$.

又 $\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\alpha\tan\beta-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha}=0$,从而 $\alpha+\beta+\gamma=0$,或 $\alpha+\beta+\gamma=\pm\pi$.故 $\tan2\alpha+\tan2\beta+\tan2\gamma=\tan2\alpha\tan2\beta\tan2\gamma$.又 $x_{k+1}=-\tan2\alpha$,$y_{k+1}=-\tan2\beta$,$z_{k+1}=-\tan2\gamma$,所以 $x_{k+1}+y_{k+1}+z_{k+1}=x_{k+1}y_{k+1}z_{k+1}$.由上可知,对一切正整数 n,等式(1)成立.由于 $x_ny_nz_n\neq0$,故 $x_n+y_n+z_n\neq0$.



14. 设个位数为 1 的 n 位数有 a_n 个，个位数字为 2 的 n 位数有 b_n 个，个位数字为 3 的 n 位数有 c_n 个，那么，个位数字为 4 的 n 位数有 b_n 个，个位数为 5 的 n 位数有 a_n 个. 显然，$a_1=b_1=c_1=1$，且有

$$a_{n+1}=a_n+b_n, \tag{1}$$

$$b_{n+1}=a_n+b_n+c_n, \tag{2}$$

$$c_{n+1}=b_n+c_n+b_n. \tag{3}$$

于是，有
$$a_{n+1}+c_{n+1}+\sqrt{3}b_{n+1}=(1+\sqrt{3})(a_n+c_n+\sqrt{3}b_n),$$

$$a_n+c_n+\sqrt{3}b_n=(1+\sqrt{3})^{n-1}(2+\sqrt{3})=\frac{1}{2}(1+\sqrt{3})^{n+1}. \tag{4}$$

同理
$$a_{n+1}+c_{n+1}-\sqrt{3}b_{n+1}=(1-\sqrt{3})(a_n+c_n-\sqrt{3}b_n),$$

$$a_n+c_n-\sqrt{3}b_n=\frac{1}{2}(1-\sqrt{3})^{n+1}. \tag{5}$$

由(4)式＋(5)式，得 $a_n+c_n=\frac{1}{4}[(1+\sqrt{3})^{n+1}+(1-\sqrt{3})^{n+1}]$.

由(4)式 − (5)式，得
$$b_n=\frac{\sqrt{3}}{12}[(1+\sqrt{3})^{n+1}-(1-\sqrt{3})^{n+1}]. \tag{6}$$

由(1)式得 $a_{n+1}-a_n=b_n$. 于是

$$\sum_{i=1}^{n}(a_{i+1}-a_i)=\sum_{i=1}^{n}b_i,$$

$$a_{n+1}-a_1=\frac{\sqrt{13}}{12}\left[\sum_{i=1}^{n}(1+\sqrt{3})^{i+1}-\sum_{i=1}^{n}(1-\sqrt{3})^{i+1}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{12}\left\{\frac{(1+\sqrt{3})^2[(1+\sqrt{3})^n-1]}{(1+\sqrt{3})-1}-\frac{(1-\sqrt{3})^2[(1-\sqrt{3})^n-1]}{(1-\sqrt{3})-1}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}[(1+\sqrt{3})^{n+2}+(1-\sqrt{3})^{n+2}-8].$$

因此，
$$a_{n+1}=\frac{1}{12}(1+\sqrt{3})^{n+2}+\frac{1}{12}(1-\sqrt{3})^{n+2}+\frac{1}{3}\ (n\geqslant 1),$$

$$a_n=\frac{1}{12}(1+\sqrt{3})^{n+1}+\frac{1}{12}(1-\sqrt{3})^{n+1}+\frac{1}{3}\ (n>1).$$

当 $n=1$ 时，$a_1=1$. 当 $n\geqslant 1$ 时，$a_n=\frac{1}{12}(1+\sqrt{3})^{n+1}+\frac{1}{12}(1-\sqrt{3})^{n+1}+\frac{1}{3}$.

从而
$$c_n=\frac{1}{6}(1+\sqrt{3})^{n+1}+\frac{1}{6}(1-\sqrt{3})^{n+1}-\frac{1}{3}$$

故所求的 n 位数的个数为

$$a_n+b_n+c_n+b_n+a_n=2a_n+2b_n+c_n=\frac{1}{12}(1+\sqrt{3})^{n+3}+\frac{1}{12}(1-\sqrt{3})^{n+3}+\frac{1}{3}$$

15. (1)依题意，$A_1(0,1)$，$A_2(1,-1)$，$A_3\left(\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right)$. 显然 $k_{A_1A_2}=-1$，$k_{A_2A_3}=1$，所以 $A_1A_2\perp A_2A_3$. 圆 C 的圆心为 A_1A_3 中点 $\left(\frac{1}{2},0\right)$，半径为 $\frac{1}{2}|A_1A_3|=\frac{\sqrt{5}}{2}$



(2) 当 $n=4$ 时，$A_4\left(\frac{8}{5},\ \frac{1}{5}\right)$，显然 A_4 在圆 C 上．$n=5$ 时，$A_5\left(\frac{21}{13},-\frac{1}{13}\right)$，显然 A_5 在圆 C 上．猜想 A_n 都在圆 C 上．以下用数学归纳法证明．①$n=4$ 时，点 A_4 在圆 C 上．假设点 $A_k(k\geqslant 4)$ 时在圆 C 上即 $\left(a_k-\frac{1}{2}\right)^2+b_k^2=\frac{5}{4}$，即 $a_k^2+b_k^2-a_k=1$．当 $n=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}\left(a_{k+1}-\frac{1}{2}\right)^2+b_{k+1}^2&=\left(1+\frac{a_k}{a_k^2+b_k^2}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{-b_k}{a_k^2+b_k^2}\right)^2\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1+3a_k}{1+a_k}\right)^2+\left(\frac{b_k}{1+a_k}\right)^2\\&=\frac{9a_k^2+6a_k+1+4b_k^2}{4(1+a_k)^2}\\&=\frac{5a_k^2+4(1+a_k)+6a_k+1}{4(1+a_k)^2}\\&=\frac{5a_k^2+10a_k+5}{4(1+a_k)^2}=\frac{5}{4}\end{aligned}$$

所以点 A_{k+1} 在圆 C 上，所以当 $n\geqslant 4$ 时，点 A_n 在圆 C 上．

16．因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，所以 $b_{n+1}=\dfrac{a_nb_n}{\frac{1}{2}(a_n+b_n)}=\dfrac{a_nb_n}{a_{n+1}}$．

所以 $a_{n+1}\cdot b_{n+1}=a_n\cdot b_n=a_{n-1}\cdot b_{n-1}=\cdots=a_1b_1$．

所以 $b_{n+1}=\frac{a_1b_1}{a_{n+1}}$．因为 $a_1=1$，$a_2=\frac{5}{2}$，故 $\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(1+b_1)$，有 $b_1=4$，所以 $b_{n+1}=\frac{4}{a_{n+1}}$．从而 $b_n=\frac{4}{a_n}$，代入 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+b_n)$，

得
$$a_{n+1}=\frac{a_n^2+4}{2a_n}.\tag{1}$$

于是(1)式又可化为如下的形式：

$$\frac{a_{n+1}+p}{a_{n+1}+q}=k\left(\frac{a_n+p}{a_n+q}\right)^2.\tag{2}$$

将(1)、(2)式展开，并比较系数，得 $p=-2$，$q=2$，$k=1$．从而

$$\frac{a_{n+1}-2}{a_{n+1}+2}=\left(\frac{a_n-2}{a_n+2}\right)^2=\left(\frac{a_{n-1}-2}{a_{n-1}+2}\right)^{2^2}=\cdots=\left(\frac{a_1-2}{a_1+2}\right)^{2^n}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^n}(n\geqslant 2).$$

所以 $\frac{a_n-2}{a_n+2}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}(n\geqslant 2)$，因此 $a_n=\dfrac{2(3^{2^{n-1}}+1)}{3^{2^{n-1}}-1}(n\geqslant 2)$．

故
$$a_n=\begin{cases}1, & n=1,\\ \dfrac{2(3^{2^{n-1}}+1)}{3^{2^{n-1}}-1}, & n\geqslant 2.\end{cases}$$

17．当 J_1 输入 m，J_2 输入 n 时，记 $k=f(m,n)$．则 $f(1,1)=1$，$f(m,n+1)=f(m,n)+2$，$f(m+1,1)=2f(m,1)$．



(1) 因为 $f(1, n+1) = f(1, n) + 2$，所以 $f(1, 1), f(1, 2), f(1, 3), \cdots, f(1, n), \cdots$ 组成一个以 $f(1, 1)$ 为首项，2 为公差的等差数列. 因此，$f(1, n) = f(1, 1) + 2(n-1) = 2n-1$

(2) 因为 $f(m+1, 1) = 2f(m, 1)$，所以 $f(1, 1), f(2, 1), f(3, 1), \cdots, f(m, 1), \cdots$ 组成一个以 $f(1, 1)$ 为首项，2 为公比的等比数列 因此，$f(m, 1) = f(1, 1)\cdot 2^{m-1} = 2^{m-1}$

(3) 因为 $f(m, n+1) = f(m, n) + 2$，所以 $f(m, 1), f(m, 2), f(m, 3), \cdots, f(m, n), \cdots$ 组成一个以 $f(m, 1)$ 为首项，2 为公差的等差数列 因此，$f(m, n) = f(m, 1) + 2(n-1) = 2^{m-1} + 2n - 2$ 所以 $f(2002, 9) = 2^{2001} + 16$

18. 设从顶点 A 开始，经过 n 段到达 A 点的不同路径数为 a_n，到 B 点与 H 点都为 b_n，到 C 点与 G 点都为 c_n，到 D 点与 F 点都为 d_n，到达 E 点已定义为 e_n，则由条件可知：$a_{n+1} = 2b_n$，$b_{n+1} = a_n + c_n$，$c_{n+1} = b_n + d_n$，$d_{n+1} = c_n$，$e_{n+1} = 2d_n$ 不难算出 $e_1 = e_2 = e_3 = 0$，$e_4 = 2$，$e_5 = 0$，$e_6 = 8$. 当 $n \geqslant 5$ 即 $n-4 \geqslant 1$ 时有

$$e_{n+2} = 2d_{n+1} = 2c_n = 2(b_{n-1} + d_{n-1}) = 2(a_{n-2} + c_{n-2} + c_{n-2}) = 2e_n + 2a_{n-2}, \tag{1}$$

故 $e_n = 2e_{n-2} + 2a_{n-4}$，所以 $2a_{n-4} = e_n - 2e_{n-2}$，因此 $a_{n-2} = 2b_{n-3} = 2(a_{n-4} + c_{n-4}) = 2a_{n-4} + 2c_{n-4} = e_n - 2e_{n-2} + 2c_{n-4} = e_n - 2e_{n-2} + 2d_{n-3} = e_n - 2e_{n-2} + e_{n-2} = e_n - e_{n-2}$，即 $a_{n-2} = e_n - 2e_{n-2}$.

将上式代入(1)式，

得
$$e_{n+2} = 4e_n - 2e_{n-2} \tag{2}$$
即(2)式对一切 $n \geqslant 5$ 成立.

当 $n = 3$ 时，$e_{n+2} = e_5 = 0$，$4e_n - 2e_{n-2} = 4e_3 - 2e_1 = 4\times 0 - 2\times 0 = 0$，(2) 式也成立.

当 $n = 4$ 时，$e_{n+2} = e_6 = 8$，$4e_n - 2e_{n-2} = 4e_4 - 2e_2 = 4\times 2 - 2\times 0 = 8$，(2) 式也成立

这说明，对于一切 $n \geqslant 3$ 的自然数，均有 $e_{n+2} = 4e_n - 2e_{n-2}$ 成立，亦即对于一切 $n \geqslant 1$ 的自然数，均有

$$e_{n+4} = 4e_{n+2} - 2e_n \tag{3}$$

因为 $e_1 = e_3 = 0$，$e_5 = 4e_3 - 2e_1 = 0$，$e_7 = 4e_5 - 2e_3 = 0$，….

可以猜想：当 $n = 2k-1\ (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，$e_n = 0$.

可以用数学归纳法证明当 $n = 2k-1\ (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，$e_n = 0$（证明略）

当 $n = 2k\ (k \in \mathbf{N}^*)$ 时，由(3)式有 $e_{2k+4} = 4e_{2k+2} - 2e_{2k}$，即 $e_{2(k+2)} = 4e_{2(k+1)} - 2e_{2k}$

设 $h_n = e_{2n}$，则 $h_{n+2} = 4h_{n+1} - 2h_n$，其特征方程为 $q^2 - 4q + 2 = 0$，解得 $q_{1,2} = 2 \pm \sqrt{2}$

于是 $h_n = r_1(2+\sqrt{2})^n + r_2(2-\sqrt{2})^n$ 由初值 $h_1 = e_2 = 0$，$h_2 = e_4 = 2$，可确定出 $r_1 = \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$，

$r_2 = -\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$

于是
$$e_{2n} = h_n = \frac{\sqrt{2}-1}{2}(2+\sqrt{2})^n - \frac{\sqrt{2}+1}{2}(2-\sqrt{2})^n$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(2+\sqrt{2})^{n-1} - (2-\sqrt{2})^{n-1}\right].$$

即 $e_n = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[(2+\sqrt{2})^{\frac{n}{2}-1} - (2-\sqrt{2})^{\frac{n}{2}-1}\right]$.



$$综上所述，x_n=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\left[(2+\sqrt{2})^{\frac{n}{2}-1}-(2-\sqrt{2})^{\frac{n}{2}-1}\right], & n=2k,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}^*.$$

19. 从题目条件可知，对于任意正整数 n，$y_n=2^k$，k 是某个与 n 有关的正整数，且 $k\geqslant 2$；$z_n\equiv 1 \pmod 4$

证明：对于正整数 n，如果 x_{n-1} 是偶数，则 $y_n>z_n$；如果 x_{n-1} 是奇数，

则
$$2y_n>z_n. \tag{1}$$

对 n 用数学归纳法．当 $n=1$ 时，由于 $y_0=4$ 和 $z_0=1$，则 $y_1>z_1$ 和 $2y_1>z_1$ 都成立．设(1)对某个正整数 n 成立．考虑 $n+1$ 的情况．当 x_n 是偶数时，由于 $y_{n+1}=2y_n>z_n=z_{n+1}$．当 x_n 是奇数时，首先确定 x_{n-1} 是奇数还是偶数．如果 x_{n-1} 是奇数，利用 $x_n=x_{n-1}-\frac{y_{n-1}}{2}-z_{n-1}$，以及 $y_{n-1}=2^k$，正整数 $k\geqslant 2$，z_{n-1} 始终为奇数，知 x_n 是偶数，这与 x_n 是奇数矛盾．因此，x_{n-1} 必是偶数．那么，由题目条件及归纳法假设，$y_{n+1}=y_n>z_n$，有 $2y_{n+1}=2y_n>y_n+z_n=z_{n+1}$．所以(1)对任何正整数 n 成立．

如果 x_0 是一个好数，当且仅当从 $n=1$ 开始，$x_n=0$．那么，x_0 如何确定呢？首先 $x_0\neq 0$．如果 x_0 是偶数，则由 $x_1=\frac{1}{2}x_0$，有 $x_0=0$，这与 $x_0\neq 0$ 矛盾．因此 x_0 必是奇数．利用 $y_0=4$，$z_0=1$ 和 $x_1=x_0-\frac{1}{2}y_0-z_0$，可得 $x_0=3$．因此，$x_0=3$ 是一个好数．

如果 x_0 是一个好数，当且仅当从某个 $n\geqslant 2$ 开始，$x_n=0$．先确定 x_{n-1} 是奇数还是偶数．如果 x_{n-1} 是一个奇数，则 x_{n-2} 必是偶数，利用 $x_n=\frac{1}{2}x_{n-1}$，可得 $x_{n-1}=0$，这是一个矛盾．因此，x_{n-2} 必是一个偶数，且 x_{n-1} 必是一个奇数．从(1)可知 $y_{n-1}>z_{n-1}$．从问(3)，有

$$x_{n-1}=\frac{1}{2}y_{n-1}+z_{n-1},y_n=y_{n-1},z_n=y_{n-1}+z_{n-1}. \tag{2}$$

因而，当 y_n，z_n 已知时，x_{n-1}，y_{n-1}，z_{n-1} 可以确定．由于 x_{n-2} 是偶数，由问(2)，有

$$x_{n-2}=2x_{n-1},y_{n-2}=\frac{1}{2}y_{n-1},z_{n-2}=z_{n-1}, \tag{3}$$

x_{n-2}，y_{n-2}，z_{n-2} 可以定出．

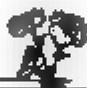
一般地，如果 x_k，y_k，z_k 已经求出，而且有序数组$(y_k,z_k)\neq(4,1)$，那么 x_{k-1}，y_{k-1}，z_{k-1} 怎样来确定呢？

① 当 $y_k>z_k$ 时（y_k 偶，z_k 奇，两者不能相等），x_{k-1} 必定是偶数．因为当 x_{k-1} 是奇数时，由问(3)可知 $y_k=y_{k-1}=z_k-z_{k-1}<z_k$，与 $y_k>z_k$ 矛盾．再由(2)式，

$$x_{k-1}=2x_k,y_{k-1}=\frac{1}{2}y_k,z_{k-1}=z_k. \tag{4}$$

② 当 $y_k<z_k$ 时，x_{k-1} 必定是奇数．因当 x_{k-1} 是偶数时，从(1)式可知 $y_k>z_k$．再利用题目条件(4)时，有

$$y_{k-1}=y_k,z_{k-1}=z_k-y_k,$$



$$x_{n-1} = x_n + \frac{1}{2}y_{n-1} + z_{n-1}. \tag{5}$$

一直做下去，到有序数组$(y_0, z_0) = (4, 1)$为止，相应地有 个x_k可以得到.

从上面叙述可以看出，从任一对正整数$k(k \geqslant 2)$，t出发，取$y_{n-1} = 2^k$，$z_{n-1} = 4t+1$，$x_n = 0$，如果x_0是 个好数，当且仅当从某个$n \geqslant 2$开始，$x_n = 0$. 那么全部x_k，y_k，$z_k(0 \leqslant k \leqslant n)$都可以算出，直到$y_0 = 4$，$z_0 = 1$止 记$x_0 = f(y_{n-1}, z_{n-1})$.

取$y_{n-1} = 64$，$z_{n-1} = 61$，可以利用上面方法，得到下列数表，并能定出$n = 9$

$$\begin{array}{lll}
x_9 = 0, & y_9 = 64, & z_9 = 125, \\
x_8 = 93, & y_8 = 64, & z_8 = 61, \\
x_7 = 186, & y_7 = 32, & z_7 = 61, \\
x_6 = 231, & y_6 = 32, & z_6 = 29, \\
x_5 = 462, & y_5 = 16, & z_5 = 29, \\
x_4 = 483, & y_4 = 16, & z_4 = 13, \\
x_3 = 966, & y_3 = 8, & z_3 = 13, \\
x_2 = 975, & y_2 = 8, & z_2 = 5, \\
x_1 = 1950, & y_1 = 4, & z_1 = 5, \\
x_0 = 1953, & y_0 = 4, & z_0 = 1.
\end{array} \tag{6}$$

另一个例子是

$$\begin{array}{lll}
x_6 = 0, & y_6 = 128, & z_6 = 129, \\
x_5 = 65, & y_5 = 128, & z_5 = 1, \\
x_4 = 130, & y_4 = 64, & z_4 = 1, \\
x_3 = 260, & y_3 = 32, & z_3 = 1, \\
x_2 = 520, & y_2 = 16, & z_2 = 1, \\
x_1 = 1040, & y_1 = 8, & z_1 = 1, \\
x_0 = 2080, & y_0 = 4, & z_0 = 1
\end{array} \tag{7}$$

由(6)及(7)，有

$$1953 = f(64, 61), 2080 = f(128, 1) \tag{8}$$

从上面两个例子可以看出，1953是一个好数，而$2080 > 1994$，不是要寻找的好数

利用(2)，(3)，(4)，(5)等的叙述，由列表，易看出，

$$f(2y, z) > f(y, z), f(y, z+4) > f(y, z). \tag{9}$$

有兴趣的读者可以列出数据，证明上式.

从(8)和(9)，小于等于1994的好数的集合由下述正整数组成：

$$f(4, 1), f(8, 1), f(8, 5), f(16, 1), f(16, 5), f(16, 9), f(16, 13), \cdots,$$

$$f(64, 1), f(64, 5), f(64, 9), \cdots, f(64, 61).$$

这个集合 一共有$1+2+4+8+16 = 31$个元素



第5讲　递推不等式

1　递推不等式的证明

1. C　由 $\frac{1}{a_n}=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\cdots+\frac{2}{n(n+1)}=2\left[\frac{1}{1\times2}+\frac{1}{2\times3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right]=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$ $=\frac{2n}{n+1}$，得 $a_n=\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$

故 $S_{2008}=\sum\limits_{k=1}^{2008}a_k=\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2008}\left(1+\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{2}\times2008+\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}\right)$.

又 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}>1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots$ $+\underbrace{\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\cdots+\frac{1}{1024}\right)}_{512个}+\underbrace{\left(\frac{1}{2048}+\frac{1}{2048}+\cdots+\frac{1}{2048}\right)}_{985个}>1+\frac{10}{2}=6$，

则 $S_{2008}>1004+3=1007$.

而 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2008}<1+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\cdots$ $+\underbrace{\left(\frac{1}{512}+\frac{1}{512}+\cdots+\frac{1}{512}\right)}_{512个}+\underbrace{\left(\frac{1}{1024}+\frac{1}{1024}+\cdots+\frac{1}{1024}\right)}_{985个}<10+1=11$.

则 $S_{2008}<1004+\frac{11}{2}=1009.5$. 故 $1007<S_{2008}<1009.5$，即与 1007 最接近.

2. 设非负等差数列 $\{a_n\}$ 的首项为 $a_1\geqslant0$，公差为 $d\geqslant0$.

(1) 因为 $m+n=2p$，所以 $m^2+n^2\geqslant2p^2$，$p^2\geqslant mn$，$a_m+a_n=2a_p$

从而有 $(a_p)^2\geqslant a_m\cdot a_n$. 因为 $S_n=\frac{n(a_1+a_n)}{2}=na_1+\frac{n(n-1)}{2}d$，所以有

$$S_n+S_m=(m+n)a_1+\frac{n(n-1)+m(m-1)}{2}d$$

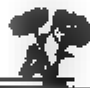
$$=2pa_1+\frac{n^2+m^2-2p}{2}d$$

$$\geqslant2pa_1+\frac{2p^2-2p}{2}d=2S_p.$$

$$S_n\cdot S_m=\frac{n(a_1+a_n)}{2}\frac{m(a_1+a_m)}{2}=\frac{mn}{4}\left(a_1^2+a_1(a_m+a_n)+a_ma_n\right)$$

$$\leqslant\frac{p^2}{4}\left(a_1^2+2a_1a_p+a_pa_p\right)=\left(\frac{p(a_1+a_p)}{2}\right)^2=(S_p)^2$$

于是
$$\frac{1}{S_m}+\frac{1}{S_n}=\frac{S_m+S_n}{S_mS_n}\geqslant\frac{2S_p}{S_pS_p}=\frac{2}{S_p}$$



(2) $\sum\limits_{n=1}^{2007}\frac{1}{S_n}=\left(\frac{1}{S_1}+\frac{1}{S_{2007}}\right)+\left(\frac{1}{S_2}+\frac{1}{S_{2006}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{S_{1003}}+\frac{1}{S_{1005}}\right)+\frac{1}{S_{1004}}\geqslant\frac{2\times1003+1}{S_{1004}}=\frac{2007}{S_{1004}}$

又因为 $S_{1004}=1004a_1+\frac{1004\cdot1003}{2}d\leqslant1004(a_1+502d)=1004a_{503}\leqslant\frac{1004}{1005}$,所以有

$$\sum_{n=1}^{2007}\frac{1}{S_n}\geqslant\frac{2007}{S_{1004}}\geqslant\frac{2007}{1004}\times1005\geqslant2008.$$

3. 由 $a_{n+1}=a_n^2-a_n+1$ 得 $a_{n+1}-1=a_n(a_n-1)$,从而 $\frac{1}{a_{n+1}-1}=\frac{1}{a_n-1}-\frac{1}{a_n}$,故

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}=\left(\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_2-1}\right)+\left(\frac{1}{a_2-1}-\frac{1}{a_3-1}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{a_{2003}-1}-\frac{1}{a_{2004}-1}\right)$$
$$=\frac{1}{a_1-1}-\frac{1}{a_{2004}-1}=1-\frac{1}{a_{2004}-1}$$

可证数列 $\{a_n\}$ 是严格递增的,故 $a_{2004}>1$,从而 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{2003}}<1$。为了证明左边不等式,只需证明 $a_{2004}-1>2003^{2003}$。

由已知用归纳法可得 $a_{n+1}=a_na_{n-1}\cdots a_1+1$ 及 $a_na_{n-1}\cdots a_1>n^n(n\in\mathbf{N}^*)$,从而易得结论成立。

4. 由已知得 $a_{n+1}+2=\frac{a_n^2+4a_n+4}{2a_n}=\frac{(a_n+2)^2}{2a_n}$,$a_{n+1}-2=\frac{a_n^2-4a_n+4}{2a_n}=\frac{(a_n-2)^2}{2a_n}$

从而 $\frac{a_{n+1}+2}{a_{n+1}-2}=\left(\frac{a_n+2}{a_n-2}\right)^2$,因此,当 $n\geqslant2$ 时,$\frac{a_n+2}{a_n-2}=\left(\frac{a_{n-1}+2}{a_{n-1}-2}\right)^2=\left(\frac{a_{n-2}+2}{a_{n-2}-2}\right)^{2^2}=\cdots=\left(\frac{a_1+2}{a_1-2}\right)^{2^{n-1}}\Rightarrow$ $\frac{a_n+2}{a_n-2}=3^{2^{n-1}}\Rightarrow a_n+2=3^{2^{n-1}}(a_n-2)\Rightarrow a_n=\frac{2(1+3^{2^{n-1}})}{3^{2^{n-1}}-1}=2+\frac{4}{3^{2^{n-1}}-1}\Rightarrow a_n>2+4\left(\frac{1}{3}\right)^{2^{n-1}}$

5. 设 $\{a_n\}$ 的公差为 d,$i\in\mathbf{N}^*$ 且 $i\leqslant n$,注意到

$$a_i+a_{n-i+1}=a_1+(i-1)d+a_1+(n-i)d=a_1+[a_1+(n-1)d]=a_1+a_n,$$
$$a_ia_{n-i+1}=[a_1+(i-1)d][a_1+(n-i)d]=a_1^2+(n-1)a_1d+(i-1)(n-i)d^2$$
$$\geqslant a_1[a_1+(n-1)d]=a_1a_n.$$

则
$$\frac{1}{a_i}+\frac{1}{a_{n-i+1}}=\frac{a_i+a_{n-i+1}}{a_ia_{n-i+1}}\leqslant\frac{a_1+a_n}{a_1a_n}=\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}.$$

令 $i=2,3,\cdots,n-1$,得

$$\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_{n-1}}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n},\ \frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_{n-2}}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n},\ \cdots,\ \frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_2}\leqslant\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}.$$

将这 $n-2$ 个不等式相加,再把所得的结果两边同时加上 $2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)$,得

$2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant n\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)$,则 $\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\leqslant\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)$

故 $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\leqslant\left[\frac{1}{n}\left(n+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\right]^n$

$$\leqslant\left\{\frac{1}{n}\left[n+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_n}\right)\right]\right\}^n=\left(1+\frac{a_1+a_n}{2a_1a_n}\right)^n$$



由上述证明可知，当且仅当 $d=0$ 即 $\{a_n\}$ 为常数列时，上式等号成立。

6 先寻找放缩的方法 记 $f(n)=\sqrt[3]{3n+1}$，则 $f(n-1)=\sqrt[3]{3n-2}$，

所以
$$\frac{f(n)}{f(n-1)}=\frac{\sqrt[3]{3n+1}}{\sqrt[3]{3n-2}}.$$

由此可得放缩的方法为：

当 $n\geqslant 2$ 时，$1+\frac{1}{3n-2}>\sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$，当 $n=1$ 时，$1+1>\sqrt[3]{4}$

证明 当 $n\geqslant 2$ 时，因为

$$\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)^3-\frac{3n+1}{3n-2}=\frac{(3n-1)^3-(3n+1)(3n-2)^2}{(3n-2)^3}=\frac{9n-5}{(3n-2)^3}>0,$$

所以
$$\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)^3>\frac{3n+1}{3n-2},$$

即 $1+\frac{1}{3n-2}>\sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}$. 当 $n\geqslant 1$ 时，$1+1>\sqrt[3]{4}$.

所以，$(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{4}\cdot\sqrt[3]{\frac{7}{4}}\cdot\sqrt[3]{\frac{10}{7}}\cdots\sqrt[3]{\frac{3n+1}{3n-2}}=\sqrt[3]{3n+1}$，

即 $(1+1)\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{7}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{3n-2}\right)>\sqrt[3]{3n+1}$.

7. (1) 因为 $f'(x)=3x^2+2x$，所以曲线 $y=f(x)$ 在 $(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线斜率 $k_{n+1}=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$，又因为过 $(0,0)$ 和 $(x_n,f(x_n))$ 两点的直线斜率是 $x_n^2+x_n$，所以 $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}$.

(2) 设 $h(x)=x^2+x$，则当 $x>0$ 时单调递增，而 $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}\leqslant 4x_{n+1}^2+2x_{n+1}=(2x_{n+1})^2+2x_{n+1}$，可得 $x_n\leqslant 2x_{n+1}$，即 $\frac{x_{n+1}}{x_n}\geqslant\frac{1}{2}$. 当 $n=1$ 时，$x_1=1$，当 $n\geqslant 2$ 时，得

$$x_n=x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}\geqslant 1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

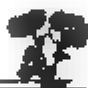
又当 $n=1$ 时也成立，故 $x_n\geqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

又因为 $x_n^2+x_n=3x_{n+1}^2+2x_{n+1}\geqslant 2x_{n+1}^2+2x_{n+1}$，即 $x_n^2+x_n\geqslant 2(x_{n+1}^2+x_{n+1})$. 设 $y_n=x_n^2+x_n$，即 $0<\frac{y_{n+1}}{y_n}\leqslant\frac{1}{2}$. 当 $n=1$ 时，$y_1=x_1^2+x_1=2$. 当 $n\geqslant 2$ 时，得

$$y_n=y_1\cdot\frac{y_2}{y_1}\cdot\frac{y_3}{y_2}\cdots\frac{y_n}{y_{n-1}}\leqslant 2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

当 $n=1$ 时，上式也成立，故 $y_n=x_n^2+x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，$n\in\mathbf{N}^*$

又 $x_n\leqslant x_n^2+x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，所以 $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\leqslant x_n\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$，$n\in\mathbf{N}^*$



8. 易得 $a_n > a_{n-1} > 0$，又 $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2 < a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_n a_{n-1} \Rightarrow \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{n^2}$，

所以 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) < 1 + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n} \Rightarrow a_n < n$.

又 $a_n = a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1}^2 < a_{n-1} + \frac{n-1}{n^2}a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} > \frac{n^2}{n^2+n-1}a_n$，

得 $a_n > a_{n-1} + \frac{1}{n^2}a_{n-1} \cdot \frac{n^2}{n^2+n-1}a_n \Rightarrow \frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n} > \frac{1}{n^2+n-1} > \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$，

所以 $\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} = \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) > \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1}$

因为 $a_1 = \frac{3}{4}$，所以 $\frac{1}{a_n} < \frac{5}{6} + \frac{1}{n+1} < \frac{n+2}{n+1}$ 于是结论成立

9. (1) 由 $x_1 = \frac{3}{2}$，$x_{n+1} = \begin{cases} 3x_n, & n \text{ 为奇数}, \\ x_n + n, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$

得

$$x_2 = 3x_1 = \frac{9}{2},\ x_3 = x_2 + 2 = \frac{13}{2},\ x_4 = 3x_3 = \frac{39}{2}$$

(2) 因为 $y_{n+1} = x_{2n+1} + (n+1) + \frac{1}{2} = (x_{2n} + 2n) + n + \frac{3}{2}$

$$= 3x_{2n-1} + 3n + \frac{3}{2} = 3\left(x_{2n-1} + n + \frac{1}{2}\right) = 3y_n.$$

又因为 $y_1 = x_1 + 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 3 \neq 0$，于是，$y_n \neq 0$，且 $\frac{y_{n+1}}{y_n} = 3$.

所以数列 $\{y_n\}$ 是首项和公比均为 3 的等比数列.

(3) 存在. 由(2)得 $y_n = 3^{n-1}y_1$，即 $x_{2n-1} + n + \frac{1}{2} = 3^{n-1} \cdot 3 = 3^n$，故 $x_{2n-1} = 3^n - \left(n + \frac{1}{2}\right)$.

$$x_n = \begin{cases} 3^{\frac{n+1}{2}} - \frac{n}{2} - 1, & n \text{ 为奇数}, \\ 3^{\frac{n+2}{2}} - \frac{3n}{2} - \frac{3}{2}, & n \text{ 为偶数}. \end{cases}$$

所以 $S_{2n} = (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}) + (x_2 + x_4 + \cdots + x_{2n})$

$= (x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1}) + (3x_1 + 3x_3 + \cdots + 3x_{2n-1})$

$= 4(x_1 + x_3 + \cdots + x_{2n-1})$

$= (3 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n) - (1 + 2 + \cdots + n) - \frac{n}{2}$

$= 4\left[\frac{3 - 3^{n+1}}{1 - 3} - \frac{n(n+1)}{2} - \frac{n}{2}\right] = 2 \cdot 3^{n+1} - 2n^2 - 4n - 6.$

$\frac{S_{2(n+1)} + a}{3^{n+1}} > \frac{S_{2n} + a}{3^n}$ 对任意 $n \in \mathbf{N}^*$，恒成立.



由于 $\frac{S_{2(n+1)}+a}{3^{n+1}}-\frac{S_{2n}+a}{3^n}=6-\frac{2(n+1)^2+4(n+1)+6-a}{3^{n+1}}-\left[6-\frac{2n^2+4n+6-a}{3^n}\right]$

$$=\frac{4n^2+4n+6-2a}{3^{n+1}}=\frac{(2n+1)^2+5-2a}{3^{n+1}}$$

得 $(2n+1)^2+5>2a$ 对任意 $n\in\mathbf{N}^*$ 恒成立. 即 $(2n+1)^2\geqslant 9$（当 $n=1$ 时取等号），故 $9+5-2a>0$，即 $a<7$.

故这样的实数集 A 是存在的，且为 $A=(-\infty,7)$.

10. (1) 证明 对于一切的正整数 i，

$$\frac{1}{a_i^2-1}+\frac{1}{7-a_i^2}=\frac{6}{(a_i^2-1)(7-a_i^2)}\geqslant\frac{6}{\left(\frac{a_i^2-1+7-a_i^2}{2}\right)^2}=\frac{2}{3}$$

(2) 由 Cauchy 不等式知 $S=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{(a_i^2-1)(7-a_{i+1}^2)}}\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\sqrt{(a_i^2-1)(7-a_{i+1}^2)}}$

$$\geqslant\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\frac{(a_i^2-1)+(7-a_{i+1}^2)}{2}}=\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{a_i^2-a_{i+1}^2}{2}+3\right)}=\frac{n}{3}$$

当 $a_1=a_2=\cdots=a_n=2$ 时，等号成立，所以 S 有最小值 $\frac{n}{3}$

11. (1) 令 $x=-1$，$y=0$，得 $f(-1)=f(-1)f(0)$，$f(0)=1$. 所以 $a_1=f(0)=1$

当 $x>0$ 时，$-x<0$，$f(0)=f(x)f(-x)=1$，故 $0<f(x)<1$.

设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，且 $x_1<x_2$，则 $x_2-x_1>0$，$f(x_2-x_1)<1$，$f(x_1)-f(x_2)=f(x_1)-f(x_1+x_2-x_1)=f(x_1)[1-f(x_2-x_1)]>0$. 所以，$f(x_1)>f(x_2)$，函数 $y=f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上是单调递减函数

由 $f(a_{n+1})=\frac{1}{f(-2-a_n)}$，得 $f(a_{n+1})f(-2-a_n)=1$. 于是 $f(a_{n+1}-a_n-2)=f(0)$，$a_{n+1}-a_n-2=0$. 即 $a_{n+1}-a_n=2$，所以 $a_n=2n-1$，$a_{2008}=4015$

(2) 由 $\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)\geqslant k\sqrt{2n+1}$ 恒成立，知

$$k\leqslant\frac{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{\sqrt{2n+1}} \text{ 恒成立.}$$

设 $F(n)=\frac{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_n}\right)}{\sqrt{2n+1}}$，则 $F(n)>0$，

且 $F(n+1)=\frac{\left(1+\frac{1}{a_1}\right)\left(1+\frac{1}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{a_{n+1}}\right)}{\sqrt{2n+3}}$. 又 $\frac{F(n+1)}{F(n)}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{4(n+1)^2-1}}>1$，即 $F(n+1)>F(n)$，所以 $F(n)\geqslant F(1)=\frac{2}{3}\sqrt{3}$. 所以，$k\leqslant\frac{2}{3}\sqrt{3}$，即 k 的最大值为 $\frac{2}{3}\sqrt{3}$



12. (1)由已知易得$\{a_n\}$为递增数列,且各项均为正. 因为$a_{n+1}a_n-1=a_n^2$,所以,当$k\geqslant 2$时,$a_k=a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}$. 由此得,$a_k^2=\left(a_{k-1}+\frac{1}{a_{k-1}}\right)^2=a_{k-1}^2+\frac{1}{a_{k-1}^2}+2>a_{k-1}^2+2$,即$a_k^2-a_{k-1}^2>2$. 则$a_n^2-a_1^2=\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)>2(n-1)$,即$a_n^2>a_1^2+2(n-1)=2n-1$. 故$a_n>\sqrt{2n-1}(n>1)$.

又$a_n^2-a_1^2=\sum\limits_{k=2}^{n}(a_k^2-a_{k-1}^2)=2(n-1)+\sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{a_{k-1}^2}\leqslant 2(n-1)+(n-1)\times 1=3n-3$,即$a_n^2\leqslant 3n-3+a_1^2=3n-2$. 故$a_n\leqslant\sqrt{3n-2}$.

综合得$\sqrt{2n-1}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{3n-2}$.

(2)由(1)的结果知$\sqrt{4005}\leqslant a_{2005}\leqslant\sqrt{6013}$,即,$63<a_{2005}<78$.

为进一步估计a_{2005}的值,引入数列$\{b_n\}$,使得$a_n^2=2n-1+b_n$.

由(1)知,当$n>1$时,有$b_n>0$. 于是,等式$a_{n+1}^2=a_n^2+2+\frac{1}{a_n^2}$可改写为$2n+1+b_{n+1}=2n-1+b_n+2+\frac{1}{2n-1+b_n}$. 由此得$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{2n-1+b_n}\leqslant b_n+\frac{1}{2n-1}$

通过归纳推出$b_{n+1}\leqslant b_1+1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-3}+\frac{1}{2n-1}$

由于$b_1=0$,所以,$b_{2005}\leqslant 1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{4005}+\frac{1}{4007}$.

为了估计该右端之值,将其分段如下:

$$b_{2005}\leqslant 1+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\cdots+\frac{1}{25}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{243}+\cdots+\frac{1}{727}\right)+\left(\frac{1}{729}+\cdots+\frac{1}{2185}\right)+\left(\frac{1}{2187}+\cdots+\frac{1}{4007}\right).$$

上式右端第1个括号中有3个加项,最大项为$\frac{1}{3}$;第2个括号中有9个加项,最大项为$\frac{1}{9}$;…;第6个括号中有729个加项,最大项为$\frac{1}{729}$;最后,第7个括号中有911个加项,最大项为$\frac{1}{2187}$. 所以,$b_{2005}<8$. 结合$a_n^2=2n-1+b_n$,得$a_{2005}^2<4010-1+8<4032.25=63.5^2$. 因此,$63<a_{2005}<63.5$. 故$m=63$.

13. 我们证明一般情形

$$\sqrt{2n+1}\leqslant a_n\leqslant\sqrt{3n+2}(n\geqslant 0) \tag{1}$$

则$n=1371$,$\sqrt{2n+1}=\sqrt{2743}\approx 52.37$,$\sqrt{3n+2}=\sqrt{4115}\approx 64.148$,

则有$52<a_{1371}<65$. 首先,我们归纳证明:

$$a_n=a_{n-1}+\frac{1}{a_{n-1}}(n\geqslant 1) \tag{2}$$

当$n=1$时,因为$a_1=2=a_0+\frac{1}{a_0}$,结论成立.

假如(2)对$n\geqslant 1$都成立,那么$a_n=\frac{(a_{n-1})^2+1}{a_{n-1}}\Rightarrow\frac{1}{a_n}=\frac{a_{n-1}}{1+(a_{n-1})^2}$.



从给出的递归关系，得到 $a_{n+1}=a_n+\frac{1}{a_n}$，故对 $n+1$ 结论成立.

显然对全体 n，$a_n>0$. 由(2)式知数列 $\{a_n\}$ 严格递增，且 $\frac{1}{a_{n-1}^2}\leqslant 1(n\geqslant 1)$. 又因 $a_n^2=a_{n-1}^2+2+\frac{1}{a_{n-1}^2}$，得

$$a_{n-1}^2+2<a_n^2\leqslant a_{n-1}^2+3(n\geqslant 1) \tag{3}$$

下面用(3)式归纳证明(1)式.

$n=0$ 时(1)式显然成立. 设对 $n\geqslant 0$(1)式成立，那么由(3)式

$$a_{n+1}\leqslant\sqrt{a_n^2+3}\leqslant\sqrt{3n+2+3}=\sqrt{3(n+1)+2},$$

$$a_{n+1}>\sqrt{a_n^2+2}\geqslant\sqrt{2n+1+2}=\sqrt{2(n+1)+1},$$

故对 $n+1$ 结论成立. 由归纳法知(1)式成立.

14. (1)由 $|OB_n|=\frac{1}{n}$，得 $b_n^2+2b_n=\frac{1}{n^2}$，解得 $b_n=\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}-1$，故对 $n\in\mathbf{N}^*$，有 $b_n>b_{n+1}>0$.

又直线 A_nB_n 的方程为 $\left(\sqrt{2b_n}-\frac{1}{n}\right)x=b_n\left(y-\frac{1}{n}\right)$，令 $y=0$，得

$$a_n=b_n\cdot\frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}-\sqrt{2b_n}}=b_n\cdot\frac{\sqrt{b_n^2+2b_n}}{\sqrt{b_n^2+2b_n}-\sqrt{2b_n}}=b_n\cdot\frac{\sqrt{b_n+2}}{\sqrt{b_n+2}-\sqrt{2}}=\sqrt{b_n+2}\cdot(\sqrt{b_n+2}+\sqrt{2})$$

显然，$f(x)=\sqrt{x+2}(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，故由 $b_n>b_{n+1}>0$ 可得 $a_n>a_{n+1}>4$.

(2) 因为 $\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{\frac{1}{n+1}\left[\sqrt{(n+1)^2+1}-(n+1)\right]}{\frac{1}{n}\left(\sqrt{(n+1)^2+1}-n\right)}=\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\sqrt{n^2+1}+n}{\sqrt{(n+1)^2+1}+(n+1)}<\frac{n}{n+1}$，

所以 $$\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$$

由于调和级数 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$ 是发散的，故存在 $n_0\in\mathbf{N}^*$，使得对任意 $n>n_0$ 都有 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>2005$，因此有 $\frac{b_2}{b_1}+\frac{b_3}{b_2}+\cdots+\frac{b_n}{b_{n-1}}+\frac{b_{n+1}}{b_n}<n-2004$.

15. (1) 依题意，$\odot P_n$ 的半径 $r_n=y_n=x_n^2$，因为 $\odot P_n$ 与 $\odot P_{n+1}$ 彼此外切，所以

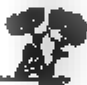
$$|P_nP_{n+1}|=r_n+r_{n+1}，即 \sqrt{(x_n-x_{n+1})^2+(y_n-y_{n+1})^2}=y_n+y_{n+1}$$

两边平方，化简得 $(x_n-x_{n+1})^2=4y_ny_{n+1}$，即 $(x_n-x_{n+1})^2=4x_n^2x_{n+1}^2$.

因为 $x_n>x_{n+1}>0$，所以 $x_n-x_{n+1}=2x_nx_{n+1}$，因此 $\frac{1}{x_{n+1}}-\frac{1}{x_n}=2(n\in\mathbf{N}^*)$，数列 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是等差数列.

(2) 由题设知，$x_1=1$，所以 $\frac{1}{x_n}=\frac{1}{x_1}+(n-1)\cdot 2$，即 $x_n=\frac{1}{2n-1}$，$S_n=\pi r_n^2=\pi y_n^2=\pi x_n^4=\frac{\pi}{(2n-1)^4}$，

$$T_n=\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}+\cdots+\sqrt{S_n}$$



$$=\sqrt{n}\left[1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}\right]$$

$$\leqslant\sqrt{n}\left[1+\frac{1}{1\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{(2n-3)\cdot(2n-1)}\right]$$

$$=\sqrt{n}\left\{1+\frac{1}{2}\left[\left(1-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{5}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2n-3}-\frac{1}{2n-1}\right)\right]\right\}$$

$$=\sqrt{n}\left[1+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n-1}\right)\right]$$

$$=\frac{3\sqrt{n}}{2}-\frac{\sqrt{n}}{2(2n-1)}<\frac{3\sqrt{n}}{2}.$$

16. (1) 令 $\frac{a_1^2}{a_2}=1,\frac{a_2^2}{a_3}=\frac{1}{3},\frac{a_3^2}{a_4}=\frac{1}{3^2},\cdots,\frac{a_n^2}{a_{n+1}}=\frac{1}{3^{n-1}}$，则无穷数列$\{a_n\}$可由$a_1=1,a_{n+1}=3^{n-1}a_n^2(n\geqslant 1)$给出. 显然，该数列满足$a_1=1,a_n\leqslant a_{n+1}(n\in \mathbf{N}^*)$，且

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_n^2}{a_{n+1}}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}=\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)<\frac{3}{2}.$$

(2) 因为 $b_n=\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}$，$a_n\leqslant a_{n+1}$，所以 $b_n\geqslant 0$. 于是 $B_n=b_1+b_2+\cdots+b_n\geqslant 0$.

又 $b_n=\left(1-\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{a_n}{\sqrt{a_{n+1}}}\left(\frac{1}{a_n}-\frac{1}{a_{n+1}}\right)$

$$=\frac{a_n}{\sqrt{a_{n+1}}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}+\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$$

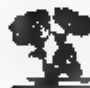
$$=\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)\left(\sqrt{\frac{a_n}{a_{n+1}}}+\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)\leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_n}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)$$

所以 $B_n\leqslant 2\left(\frac{1}{\sqrt{a_1}}-\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}\right)<\frac{2}{\sqrt{a_1}}=2$. 故 $0\leqslant B_n<2$.

17. (1) 设过 $F\left(\frac{1}{4},-\frac{1}{8}\right)$ 的直线方程为 $y+\frac{1}{8}=k\left(x-\frac{1}{4}\right)$. 又设 $B(x_1,y_1)$，$C(x_2,y_2)$，联立方程组，$\begin{cases}y+\frac{1}{8}=k\left(x-\frac{1}{4}\right),\\ y=-2x^2+x-\frac{1}{8},\end{cases}$ 消去 y，得 $2x^2+(k-1)x-\frac{k}{4}=0$. 从而有，$x_1+x_2=-\frac{k-1}{2}$，

$y_1+y_2=k\left(x_1+x_2-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{4}=-\frac{k^2}{2}-\frac{1}{4}$.

设 $\triangle ABC$ 的重心坐标为 (x,y)，则 $\begin{cases}x=\dfrac{x_1+x_2+\frac{1}{4}}{3}\\ y=\dfrac{y_1+y_2+\frac{11}{8}}{3}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3-2k}{12}\\ y=-\dfrac{k^2}{6}+\dfrac{3}{8}\end{cases}$



消去 k，即得 $y=-6x^2+3x$.

(2) 因为 $0<x_1<\frac{1}{2}$，$x_2=f(x_1)=-6x_1^2+3x_1=3x_1(1-2x_1)$，所以

$$0<x_2=3x_1(1-2x_1)\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{2x_1+(1-2x_1)}{2}\right]^2=\frac{3}{8},$$

上式右边等号成立当且仅当 $x_1=\frac{1}{4}$. 假设 $0<x_k\leqslant\frac{3}{8}$，则

$$0<x_{k+1}=3x_k(1-2x_k)\leqslant\frac{3}{2}\left[\frac{2x_k+(1-2x_k)}{2}\right]^2=\frac{3}{8},$$

上式右边等号成立当且仅当 $x_k=\frac{1}{4}$. 由此得到 $0<x_k\leqslant\frac{3}{8}(k=2,3,\cdots)$. 从而有

$$0<\sum_{k=1}^{n}x_{k+1}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{3}{8}\right)^k=\frac{3}{5}\left[1-\left(\frac{3}{8}\right)^n\right]<\frac{3}{5}.$$

10. 因为 $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}a_n^2-2a_n+2=\frac{1}{2}(a_n-2)^2\geqslant 0$，所以，$a_{n+1}\geqslant a_n$，即数列 $\{a_n\}$ 为递增数列.

(1) ① 由 $a_1=4$ 及 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，可得 $a_2=6$，$a_3=14$. 于是，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_n\geqslant 6$. 故 $a_{n+1}-2a_n=\frac{1}{2}a_n^2-3a_n+2=\frac{1}{2}(a_n-3)^2-\frac{5}{2}>0$. 因此，当 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}>2a_n$.

② 因为 $n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}>2a_n$，所以，$n\geqslant 2$ 时，$a_{n+1}>2^{n-2}a_2=6\times 2^{n-2}=3\times 2^{n-1}$

由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，可得 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{a_n}-1$.

用数学归纳法证明：$\frac{1}{2}a_n<\left(\frac{3}{2}\right)^n+1(n\geqslant 3)$.

当 $n=3$ 时，$\frac{1}{2}a_3=7>\left(\frac{3}{2}\right)^3+1$，结论成立.

假设结论对 $n=k(k\geqslant 3)$ 成立，即 $\frac{1}{2}a_k\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^k+1$，则结合 ① 的结论可得

$$\frac{1}{2}a_{k+1}>a_k\geqslant 2\left(\frac{3}{2}\right)^k+2>\left(\frac{3}{2}\right)^{k+1}+1,$$

即当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

综上可知，不等式 $\frac{1}{2}a_n>\left(\frac{3}{2}\right)^n+1$ 对一切 $n(n\geqslant 3)$ 都成立. 因此，当 $n\geqslant 3$ 时，

$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}a_n+\frac{2}{a_n}-1>\frac{1}{2}a_n-1>\left(\frac{3}{2}\right)^n$，即 $a_{n+1}>\left(\frac{3}{2}\right)^n a_n$.

又 $a_2=6=\left(\frac{3}{2}\right)a_1$，$a_3=14>\left(\frac{3}{2}\right)^2a_2=13.5$，则当 $n\geqslant 1$ 时，有 $a_{n+1}\geqslant\left(\frac{3}{2}\right)^n a_n$.

(2) 由于 $a_1=1$，而数列 $\{a_n\}$ 为递增数列，故当 $n\geqslant 1$ 时，有 $a_n>1$. 由 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，可得



$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_n-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}$

而 $a_1=1$，于是，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_k-2}-\frac{1}{a_{k+1}-2}\right)=\frac{1}{a_1-2}-\frac{1}{a_{n+1}-2}=\frac{1}{2-a_{n+1}}-1$

下面证明：当 $n\geqslant5$ 时，有 $a_n<2-\frac{1}{n-1}$

根据 $a_1=1$ 及 $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n^2-a_n+2$，计算得

$$a_2=\frac{3}{2},\ a_3=\frac{13}{8},\ a_4=\frac{217}{128},\ a_5=2-\frac{217}{128}\left(1-\frac{1}{2}\times\frac{217}{128}\right)=2-\frac{217}{128}\times\frac{39}{256}<2-\frac{1}{4}$$

故当 $n=5$ 时，结论成立.

假设结论对 $n=k(k\geqslant5)$ 成立，即 $a_k<2-\frac{1}{k-1}$.

因为 $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-1)^2+\frac{3}{2}$，而函数 $f(x)=\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}$ 在 $x>1$ 时为增函数，所以，

$a_{k+1}<\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{k-1}-1\right)^2+\frac{3}{2}=2-\frac{1}{k-1}+\frac{1}{2(k-1)^2}<2-\frac{1}{k}$，即当 $n=k+1$ 时，结论也成立.

综上可知，不等式 $a_n<2-\frac{1}{n-1}$ 对一切 $n(n\geqslant5)$ 都成立．于是，当 $n\geqslant5$ 时，$a_{n+1}<2-\frac{1}{n}$，故 $\frac{1}{2-a_{n+1}}<n$．所以，$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\frac{1}{2-a_{n+1}}-1<n-1$.

2 递推不等式的解法

1. 由题设，$a_{n+2}\geqslant a_n+2$，则

$$a_{2007}\geqslant a_{2005}+2\geqslant a_{2003}+2\times2\geqslant\cdots\geqslant a_1+2\times1003=2007.$$

由 $a_{n+2}\geqslant a_n+2$，得 $a_n\leqslant a_{n+2}-2$，则 $a_{n+3}\leqslant a_n+3\leqslant a_{n+2}-2+3=a_{n+2}+1(n\geqslant1)$.

于是

$$\begin{aligned}a_{2007}&\leqslant a_{2006}+1\leqslant a_{2005}+1\times2\leqslant a_{2002}+3+1\times2\\&\leqslant a_{1999}+3\times2+1\times2\leqslant\cdots\leqslant a_1+3\times668+1\times2=2007,\end{aligned}$$

所以

$$a_{2007}=2007.$$

易知数列 $a_1=1,a_2=2,\cdots,a_n=n$ 符合本题要求.

2. $\frac{f(n+1)+a}{1+n}\geqslant\frac{f(n)+a}{n}$，$(n\geqslant1)$，令 $g(n)=\frac{f(n)+a}{n}$，则 $g(n+1)\geqslant g(n)$，故所给递推不等式的解 $f(n)=ng(n)-a$，其中 $g(n+1)\geqslant g(n)$，$g(1)=1+a$.

3. 由已知 $f(1)=\sqrt{5}$，得 $g(1)=1$．将 $f(n)=\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{g(n)}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{g(n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$ 代入递推不等式 $f(n+1)\geqslant f^2(n)-2$，$n\in\mathbf{N}^*$，得

$$\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{g(n+1)}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{g(n+1)}\geqslant\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{2g(n)}+\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{2g(n)}$$

由 $n\in\mathbf{N}^*$ 时 $g(n)\geqslant 1$，可推出 $g(n+1)\geqslant 2g(n)$，所以

$$g(n)\geqslant 2g(n-1)\geqslant\cdots\geqslant 2^{n-1}g(1)=2^{n-1}$$

4. 在题中关于函数 $f(n)\in M$ 的不等式中，取 $n=m=0$，得到 $(f(0))^2\geqslant 2f(0)$ 但 $f(0)\neq 0$. 因此 $f(0)\geqslant 2$. 不妨取 $f(0)=2$. 由于只要求出一个解，将题给不等关系变成恒等关系试一试，即

$$f(n)f(m)=f(n+m)+f(n-m).$$

在恒等式中取 $m=1$，得到

$$f(n)f(1)=f(n+1)+f(n-1),\ n\in\mathbf{Z}.$$

如果给出函数 $f(n)$ 在点 $n=0$ 与 $n=1$ 上的值，则由上面的恒等式可以惟一确定 $f(2)$ 与 $f(-1)$ 的值，然后又可确定 $f(3)$ 与 $f(-2)$ 的值，等等. 即可对每个 $n\in\mathbf{Z}$ 确定 $f(n)$ 的值. 因为 $f(0)=2$，且 $f(1)=\frac{5}{2}$（在(1)中）或 $f(1)=\sqrt{3}$（在(2)中），所以函数 $f(n)$ 由题中条件惟一确定. 下面证明函数 $f(n)=2^n+2^{-n}$，$f(n)=2\cos\frac{n\pi}{6}$ 分别满足(1)与(2)的全部条件. 事实上，有

(1) $f(0)=2^0+2^0\neq 0$，$f(1)=2^1+2^{-1}=\frac{5}{2}$，

$f(n)f(m)=(2^n+2^{-n})(2^m+2^{-m})=(2^{n+m}+2^{-n-m})+(2^{n-m}+2^{m-n})=f(n+m)+f(n-m)$，其中，$n,m\in\mathbf{Z}$.

(2) $f(0)=2\cos 0\neq 0$，$f(1)=2\cos\frac{\pi}{6}=\sqrt{3}$.

$$f(n)f(m)=4\cos\frac{\pi n}{6}\cos\frac{\pi m}{6}=2\cos\frac{\pi(n+m)}{6}+2\cos\frac{\pi(n-m)}{6}=f(n+m)+f(n-m),$$

其中 $n,m\in\mathbf{Z}$.

注　从特殊化后函数 $f(n)$ 满足的关系式，自然想到指数函数，由于三角函数倍角公式，可以尝试三角函数.

此时函数满足的关系式比较简单，容易确定函数的形式.

5. 用待定系数法. 令

$$f(n+1)+\alpha(n+1)+\beta\geqslant 2[f(n)+\alpha n+\beta],$$

即

$$f(n+1)\geqslant 2[f(n)+\alpha n+\beta]-\alpha(n+1)-\beta,$$

$$f(n+1)\geqslant 2f(n)+\alpha n+\beta-\alpha. \tag{2}$$

将(2)式与(1)式比较，得

$$\begin{cases}\alpha=3,\\ \beta-\alpha=-1,\end{cases}\ \text{解得}\ \begin{cases}\alpha=3,\\ \beta=2.\end{cases}$$

所以(1)可化为

$$f(n+1)+3(n+1)+2\geqslant 2[f(n)+3n+2].$$

两边了除 2^{n+1}，得



$$\frac{f(n+1)+3(n+1)+2}{2^{n+1}} \geqslant \frac{f(n)+3n+2}{2^n}$$

设 $\frac{f(n)+3n+2}{2^n}=g(n)$，则 $g(1)=\frac{f(1)+3+2}{2}=3$，$g(n+1)\geqslant g(n)$

所给函数不等式的解是 $f(n)=2^n g(n)-3n-2$，其中任意数列 $g(n)$ 满足 $g(1)=3$，$g(n+1)\geqslant g(n)$.

注　一般地，$\sum_{i=1}^{n} f(i) \geqslant \alpha f(n)+\sum_{i=1}^{n}\beta_i n^i (n\geqslant 1)$ 型函数不等式均可按以上方法求解.

6. 由所给递推不等式可化为

$$f(n+1)\geqslant 4f(n)+20\sqrt{f(n)}+25,$$

即 $$f(n+1)\geqslant (2\sqrt{f(n)}+5)^2,\ \sqrt{f(n+1)}\geqslant 2\sqrt{f(n)}+5$$

两边同加 5，得

$$\sqrt{f(n+1)}+5\geqslant 2[\sqrt{f(n)}+5],$$

两边同除 2^{n+1}，得

$$\frac{\sqrt{f(n+1)}+5}{2^{n+1}}\geqslant \frac{\sqrt{f(n)}+5}{2^n}.$$

令 $\frac{\sqrt{f(n)}+5}{2^n}=g(n)$，则 $g(1)=\frac{\sqrt{f(1)}+5}{2}=4$，$g(n+1)\geqslant g(n)$

所给不等式(1)的解是 $f(n)=(2^n g(n)-5)^2$，其中任意数列 $g(n)$ 满足 $g(1)=4$，$g(n+1)\geqslant g(n)$.

7. 由 $f(n)\geqslant 3^{n+1}f(n-1)$，可设 $f(n)=3^{n+1}g(n)f(n-1)$，$g(n)\geqslant 1$.

依次以 2，3，4，…，n 代替所给递推不等式中的 n，可得

$$f(2)=3^3 g(2)f(1),$$
$$f(3)=3^4 g(3)f(2),$$
$$\cdots$$
$$f(n)=3^{n+1}g(n)f(n-1).$$

将上面 $n-1$ 个等式相乘，可得

$$f(n)=3^3 g(2)\cdot 3^4 g(3)\cdots 3^{n+1}g(n)f(1)$$
$$=3^{3+4+\cdots+(n+1)}g(2)g(3)\cdots g(n)=3^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}g(2)g(3)\cdots g(n)\quad \forall n\in \mathbf{N}.$$

当 $g(n)=3^{0}$ 时，可得满足 $f(1)=1$，$f(n)=3^{n+1}f(n-1)$，$\forall n\geqslant 2$ 的递归数列的通项公式为 $f(n)=3^3\cdot 3^4\cdots 3^{n+1}f(1)=3^{3+4+\cdots+(n+1)}=3^{\frac{(n-1)(n+4)}{2}}$，$\forall n\in \mathbf{N}$.

注　这种方法与前面递归数列求和法类似，只是此时我们是以乘积的方法消去除 $f(n)$ 以外其他形式的函数，取代前面相加消去除了 $f(n)$ 以外其他形式的函数

8. 解法 1　将 $f(n)=S_n-S_{n-1}$ 代入所给递推不等式，得

$$S_n\geqslant \frac{1}{2}\left[S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right],$$



变形后可得

$$S_n^2-S_{n-1}^2\geqslant 1,$$

引入参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant 1)$，令 $S_n^2-S_{n-1}^2=g(n)$，得

$$S_n^2-S_1^2=(S_n^2-S_{n-1}^2)+(S_{n-1}^2-S_{n-2}^2)+\cdots+(S_2^2-S_1^2)=\sum_{i=1}^{n-1}g(i+1),$$

所以
$$S_n=\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}g(i+1)},$$

故所给递推不等式的解为 $f(n)=S_n-S_{n-1}=\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-1}g(i+1)}-\sqrt{1+\sum_{i=1}^{n-2}g(i+1)}$，其中任意函数 $g(n)$ 满足 $g(n)\geqslant 1$.

解法 2　将 $f(n)=S_n-S_{n-1}$ 代入递推不等式，得

$$S_n\geqslant\frac{1}{2}\left[S_n-S_{n-1}+\frac{1}{S_n-S_{n-1}}\right].$$

变形后可得 $S_n^2-S_{n-1}^2\geqslant 1$，即 $S_n^2-n\geqslant S_{n-1}^2-(n-1)$.

令 $g(n)=S_n^2-n$，则 $g(n)\geqslant g(n-1)$，$S_n^2=n+g(n)$，故所给递推不等式的解为 $f(n)=S_n-S_{n-1}=\sqrt{1+g(n)}-\sqrt{1+g(n-1)}$，其中 $g(n)\geqslant g(n-1)$，$g(1)=0$.

注　当 $g(n)=1$ 时，相应的函数方程 $f(1)=1$ 且 $S_n=\frac{1}{2}\left[f(n)+\frac{1}{f(n)}\right]$ 的解为 $f(n)=\sqrt{n}-\sqrt{n-1}$.

9　记 $S_n=\sum_{i=1}^{n}f(i)$，则 $f(n)=S_n-S_{n-1}$，代入所给递推不等式得

$$S_n\geqslant 4(S_n-S_{n-1})+2(n\geqslant 1),$$

$$S_n\leqslant\frac{4}{3}S_{n-1}-\frac{2}{3}. \tag{1}$$

令 $S_n+x\leqslant\frac{4}{3}(S_{n-1}+x)$，即 $S_n\leqslant\frac{4}{3}S_{n-1}+\frac{x}{3}$，与(1)式比较得 $x=-2$，所以

$$S_n-2\leqslant\frac{4}{3}(S_{n-1}-1).$$

两边同除 $\left(\frac{4}{3}\right)^n$，则可得 $\frac{S_n-2}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}\leqslant\frac{S_{n-1}-2}{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-1}}$，记 $\frac{S_n-2}{\left(\frac{4}{3}\right)^n}=b_n$，这里 $b_1=\frac{S_1-2}{\frac{4}{3}}=\frac{f(1)-2}{\frac{4}{3}}=\frac{3}{4}$，$b_n\leqslant b_{n-1}$.

所给函数不等式(1)的解是 $S_n=b_n\left(\frac{4}{3}\right)^n+2$，其中 $b_1\leqslant\frac{3}{4}$，$b_n\leqslant b_{n-1}$.

10. 解法 1　由所给递推不等式可知

$$f(n)-f(n-1)\geqslant 2[f(n-1)-f(n-2)],\ \forall n\geqslant 3.$$



根据 $f(1)=1$，$f(2)=3$，可推知 $f(n)-f(n-1)>0$，$n\in N^*$，$n>1$，于是可设

$$f(n)-f(n-1)=g(n)[f(n-1)-f(n-2)],\ \forall g(n)\geqslant 2.$$

以 3，4，5，…，n 代入上式中的 n，可得

$$f(3)-f(2)=g(3)[f(2)-f(1)],$$
$$f(4)-f(3)=g(4)[f(3)-f(2)],$$
$$\cdots$$
$$f(n)-f(n-1)=g(n)[f(n-1)-f(n-2)].$$

将这 $n-2$ 个等式相乘，可得

$$f(n)-f(n-1)=g(3)g(4)\cdots g(n)[f(2)-f(1)]=g(3)g(4)\cdots g(n)[3+1],$$

$$f(n)-f(n-1)=4g(3)g(4)\cdots g(n).$$

再以 3，4，…，n 代入上式中的 n，得到

$$f(2)-f(1)=2,$$
$$f(3)-f(2)=4g(3),$$
$$f(4)-f(3)=4g(3)g(4),$$
$$\cdots$$
$$f(n)-f(n-1)=4g(3)g(4)\cdots g(n).$$

将此 $n-1$ 个等式相加，可得

$$f(n)-f(1)=2+4g(3)+4g(3)g(4)+\cdots+4g(3)g(4)\cdots g(n)$$

即 $f(n)=3+4g(3)+4g(3)g(4)+\cdots+4g(3)g(4)\cdots g(n)$，$\forall g(n)\geqslant 2$，$n\in N$.

解法 2　由 $f(n)-f(n-1)\geqslant 2[f(n-1)-f(n-2)]$，$\forall n\geqslant 3$.

两边同除以 2^n，得

$\dfrac{f(n)-f(n-1)}{2^n}\geqslant\dfrac{f(n-1)-f(n-2)}{2^{n-1}}$ 令 $\dfrac{f(n)-f(n-1)}{2^n}=g(n)$，则 $g(n+1)\geqslant g(n)$，下略.

11. 由假设条件易知 $f(n)>0$，$\forall n\in N$，在所给递推不等式两边取对数，得到

$$\log_2 f(n)\geqslant\frac{1}{2}[\log_2 f(n-1)+\log_2 f(n-2)],$$

$$\log_2 f(n)+\frac{1}{2}\log_2 f(n-1)\geqslant\log_2 f(n-1)+\frac{1}{2}\log_2 f(n-2),\ \forall n\geqslant 3.$$

令 $g(n)=\log_2 f(n)+\dfrac{1}{2}\log_2 f(n-1)$，则上式即 $g(n)\geqslant g(n-1)$，$g(1)=3$ 于是

$$(-2)^n g(n)=(-2)^n\log_2 f(n)-(-2)^{n-1}\log_2 f(n-1),$$

利用 $f(1)=1$，对上式递推求和，得 $(-2)^n\log_2 f(n)=\sum\limits_{k=2}^{n}(-2)^k g(k)$，

所以 $f(n)=2^{\sum\limits_{k=2}^{n}(-2)^{k-n}g(k)}$，其中 $g(n)\geqslant f(n-1)$，$g(1)=3$.



注　取 $g(n)=3$，可得相应函数方程：设 $f(1)=1$，$f(2)=8$ 且满足：

$$f(n)=\sqrt{f(n-1)f(n-2)},\ \forall n\in\mathbf{N},\ n\geqslant 3.$$

的解 $f(n)=2^{2\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right]}$

12. 所给递推不等式相应递推数列的特征方程为 $2r^2+(1-1)r-2=0$（即 $r^2-1=0$），有两个相异根 $r_1=1$ 及 $r_2=-1$.

因为 $f(n+1)-1\geqslant\dfrac{-[f(n)-1]}{2f(n)+1}$，难以判断 $f(n)-1$ 的正负；

而 $f(n+1)+1\geqslant\dfrac{3[f(n)+1]}{2f(n)+1}$，由 $f(1)=2$，结合上式知 $f(n)+1>0$.

解法 1　引入积性参函数 $g(n)(\forall g(n)\geqslant 3)$，令

$$f(n+1)+1=g(n)\frac{[f(n)+1]}{2f(n)+1}.$$

取倒数，得

$$\frac{g(n)}{f(n+1)+1}=\frac{-1}{f(n)+1}+2.$$

两边同乘 $(-1)^{n+1}\prod\limits_{i=1}^{n-1}g(i)$，得

$$\frac{(-1)^{n+1}\prod\limits_{i=1}^{n}g(i)}{f(n+1)+1}=\frac{(-1)^{n}\prod\limits_{i=1}^{n-1}g(i)}{f(n)+1}+2(-1)^{n+1}\prod_{i=1}^{n-1}g(i).$$

令 $\varphi(n)=\dfrac{(-1)^{n}\prod\limits_{i=1}^{n-1}g(i)}{f(n)+1}$，则上式化为一阶线性函数方程 $\varphi(n+1)=\varphi(n)+2(-1)^{n+1}\prod\limits_{i=1}^{n-1}g(i)$，下略.

解法 2　$\dfrac{3}{f(n+1)+1}\leqslant 2-\dfrac{1}{f(n)+1}$，引入和性参函数 $g(n)(\forall g(n)\leqslant 2)$，令

$$\frac{3}{f(n+1)+1}=g(n)-\frac{1}{f(n)+1}.$$

两边同乘 $(-3)^n$，得

$$\frac{(-3)^{n+1}}{f(n+1)+1}-\frac{(-3)^n}{f(n)+1}=(-3)^n g(n).$$

令 $n=2,3,\cdots,n$，得

$$\frac{(-3)^2}{f(2)+1}-\frac{(-3)^1}{f(1)+1}=(-3)^1 g(1),$$

$$\frac{(-3)^3}{f(3)+1}-\frac{(-3)^2}{f(2)+1}=(-3)^2 g(2),$$

$$\cdots$$

$$\frac{(-3)^n}{f(n)+1}-\frac{(-3)^{n-1}}{f(n-1)+1}=(-3)^{n-1}g(n-1).$$

把上面 $n-1$ 个式子相加,得 $\frac{(-3)^n}{f(n)+1}-\frac{(-3)^1}{f(1)+1}=\sum_{i=1}^{n-1}(-3)^i g(i)$

由此得到递推不等式的解是 $f(n)=\frac{(-3)^n}{\sum_{i=1}^{n-1}(-3)^i g(i)-1}-1$.

13. 在 $f(n+1)\geqslant af^a(n)$ 两边同乘 $a^{\frac{1}{a-1}}$,得

$$a^{\frac{1}{a-1}}f(n+1)\geqslant aa^{\frac{1}{a-1}}f^a(n),\text{即 } a^{\frac{1}{a-1}}f(n+1)\geqslant\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(n)\right]^a.$$

两边取对数,得

$$\log_a\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(n+1)\right]\geqslant a\log_a\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(n)\right].$$

两边同除 a^n,得

$$\frac{\log_a\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(n+1)\right]}{a^n}\geqslant\frac{\log_a\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(n)\right]}{a^{n-1}}$$

令 $\frac{\log_a\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(n)\right]}{a^{n-1}}=g(n)$,则 $g(n+1)\geqslant g(n)$, $g(1)=\frac{\log_a\left[a^{\frac{1}{a-1}}f(1)\right]}{a^{1-1}}=\frac{1}{a-1}$,于是,所给递推不等式的通解是 $f(n)=a^{a^{n-1}g(n)-\frac{1}{a-1}}$,其中 $\{g(n)\}$ 是单调递增且 $g(1)=\frac{1}{a-1}$ 的任意数列

14. 所给递推不等式相应递推数列的特征方程 $x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)$ 有两个根 $\pm\sqrt{a}$.

令 $f(n)=\sqrt{a}\cdot\frac{1+g(n)}{1-g(n)}$,则 $g(n)=\frac{f(n)-\sqrt{a}}{f(n)+\sqrt{a}}$, $-1<g(n)<1$.

代入所给递推不等式,得

$$\sqrt{a}\cdot\frac{1+g(n+1)}{1-g(n+1)}\geqslant\frac{1}{2}\cdot\left[\sqrt{a}\cdot\frac{1+g(n)}{1-g(n)}+\sqrt{a}\cdot\frac{1-g(n)}{1+g(n)}\right],$$

$$\frac{1+g(n+1)}{1-g(n+1)}\geqslant\frac{1+g^2(n)}{1-g^2(n)},$$

$$g(n+1)\geqslant g^2(n).$$

可见 $n\geqslant 2$ 时,$g(n)\geqslant 0$. 所以

$$\lg g(n+1)\geqslant 2\lg|g(n)|,\ \frac{\lg g(n+1)}{2^n}\geqslant\frac{\lg|g(n)|}{2^{n-1}}$$

令 $\frac{\lg|g(n)|}{2^{n-1}}=\varphi(n)$,则 $\varphi(1)=g(1)=\lg\frac{|t-\sqrt{a}|}{t+\sqrt{a}}$, $\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)$.

所给递推不等式的解是

$$f(n)=\sqrt{a}\cdot\frac{1+g(n)}{1-g(n)}=\sqrt{a}\cdot\frac{1+10^{2^{n-1}\varphi(n)}}{1-10^{2^{n-1}\varphi(n)}},\ n\geqslant 2.$$

其中任意函数 $\varphi(n)$ 满足 $\varphi(1)=\lg\frac{|t-\sqrt{a}|}{t+\sqrt{a}}$, $\varphi(n+1)\geqslant\varphi(n)$.



15 令 $f(n)=h(n)+\frac{1}{h(n)}$，$n\in\mathbf{N}^*$，则代入所给不等式得

$$h(n+1)+\frac{1}{h(n+1)}\geqslant\left[h(n)+\frac{1}{h(n)}\right]^3-3\left[h(n)+\frac{1}{h(n)}\right],$$

即
$$h(n+1)+\frac{1}{h(n+1)}\geqslant h^3(n)+\frac{1}{h^3(n)}. \tag{1}$$

由 $h(1)+\frac{1}{h(1)}=\sqrt{5}$，可取 $a=h(1)=\frac{\sqrt{5}+1}{2}>1$，结合(1)式，可猜知 $h(n)>0$，$n\in\mathbf{N}^*$，又

$$h(n+1)+\frac{1}{h(n+1)}\geqslant h^3(n)+\frac{1}{h^3(n)}\geqslant 2.$$

不妨设定 $h(n)>1$，$n\in\mathbf{N}^*$，由不等式(1)，可得

$$h(n+1)-h^3(n)\geqslant\frac{1}{h^3(n)}-\frac{1}{h(n+1)},\ [h(n+1)-h^3(n)]\left[1-\frac{1}{h^3(n)h(n+1)}\right]\geqslant 0.$$

由此可得：$h(n+1)\geqslant h^3(n)$，$\log_a h(n+1)\geqslant 3\log_a h(n)$，$\frac{\log_a h(n+1)}{3^n}\geqslant\frac{\log_a h(n)}{3^{n-1}}$.

令 $g(n)=\frac{\log_a h(n)}{3^{n-1}}$，则 $g(n+1)\geqslant g(n)$，$g(1)=\frac{\log_a h(1)}{3^0}=1$，于是，$h(n)=a^{3^{n-1}g(n)}$，所以题给递推不等式的通解是

$$f(n)=a^{3^{n-1}g(n)}+a^{-3^{n-1}g(n)}=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{3^{n-1}g(n)}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3^{n-1}g(n)},\ n\in\mathbf{N}^*$$

其中，$\{g(n)\}$ 是单调递增且 $g(1)=1$ 的任意数列.

注 取 $g(n)=1$，$n\in\mathbf{N}^*$，可得：满足 $f(1)=\sqrt{5}$，且 $f(n+1)=f^3(n)-3f(n)$，$n\in\mathbf{N}^*$ 的递推方程的解为 $f(n)=\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^{3^{n-1}}+\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{3^{n-1}}$，$n\in\mathbf{N}^*$.

16. 证明 (1) 先证明 $a_n=F_{n+3}$ 是满足条件的（$\{F_n\}$ 为斐波那契数列），$a_1=3=F_4$，$a_2=5=F_5$ 均成立.

因为 $F_3F_1-F_2^2=1$，当 $k\geqslant 3$ 时，

$$F_{k+1}F_{k-1}-F_k^2=(F_k+F_{k-1})F_{k-1}-F_k(F_{k-1}+F_{k-2})=-(F_kF_{k-2}-F_{k-1}^2).$$

因为 $F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=(-1)(F_nF_{n-2}-F_{n-1}^2)=\cdots=(-1)^{n-2}(F_3F_1-F_2^2)=(-1)^{n-2}$ 若对所有 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=F_{n+3}$，则验证 $n=k\geqslant 2$ 时，

$$a_{k-1}a_{k+1}-a_k^2=F_{k+2}F_{k+4}-F_{k+3}^2=(-1)^{k-1},$$

所以 $-k<-1\leqslant a_{k-1}a_{k+1}-a_k^2\leqslant 1<k$，$\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}-n}<\sqrt{a_k}<\sqrt{a_{k-1}a_{k+1}+n}$.

存在数列 $\{a_n\}$，使 $\{a_n\}$ 中每个 $a_i=F_{i+3}$

(2) 下证 $\{a_n\}$ 惟一确定 用数学归纳法证明 $a_n=F_{n+3}$ 且 $a_n\geqslant 2n+2$ (3)

$n=3$ 时，$7<\frac{23}{3}=\frac{a_2^2-2}{a_1}<a_3<\frac{a_2^2+2}{a_1}=9$.

事实上由已知不等式可推得 $\frac{a_k^2-k}{a_{k-1}}<a_{k+1}<\frac{a_k^2+k}{a_{k-1}}$.

因为 $a_3\in \mathbf{N}$，所以 $a_3=8$，同时 $a_3\geqslant 2\times 3+2$，所以(3)式成立.

$n=4$ 时，$12<\frac{61}{5}=\frac{a_3^2-3}{a_2}<a_4<\frac{a_3^2+3}{a_2}=\frac{67}{5}<14$.

又 $a_4\in \mathbf{N}$，所以 $a_4=13$. 另外，$a_4\geqslant 2\times 4+2$，所以(3)式成立. 设 $n=k-1$ 及 $n=k(k\geqslant 4)$ 时(3)式成立. 则 $n=k+1$ 时，因为 $\frac{a_k^2+k}{a_{k-1}}-\frac{a_k^2-k}{a_{k-1}}=\frac{2k}{a_{k-1}}<\frac{2k}{2(k-1)+2}=1$

又 $\left(\frac{a_k^2-k}{a_{k-1}},\frac{a_k^2+k}{a_{k-1}}\right)$中至多只有一个整数

$a_{k+1}\in \mathbf{N}$，且 $\frac{a_k^2-k}{a_{k-1}}<a_{k+1}<\frac{a_k^2+k}{a_{k-1}}$，所以 a_{k+1} 确定为 F_{k+4}. 且

$$a_{k+1}=F_{k+4}=F_{k+3}+F_{k+2}=a_k+a_{k-1}\geqslant(2k+2)+2k\geqslant 2(k+1)+2.$$

所以 $n=k+1$ 时，(3)式成立. 因此$\{a_n\}$唯一确定. 证毕.

综上所述，可发现 $a_n=F_{n+3}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+3}\right]$

17. 由所给递推不等式可得

$$3[f(n+3)-f(n+2)]-[f(n+2)-f(n+1)]-2[f(n+1)-f(n)]\leqslant 0.$$

令
$$\varphi(n)=f(n+1)-f(n),$$

则
$$\varphi(1)=f(2)-f(1)=1,\ \varphi(2)=f(3)-f(2)=0.$$

由上式可得 $3\varphi(n+2)-\varphi(n+1)-2\varphi(n)\leqslant 0$，$\varphi(n+2)-\varphi(n+1)\leqslant-\frac{2}{3}[\varphi(n+1)-\varphi(n)]$

两边同乘$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}$，得

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}[\varphi(n+2)-\varphi(n+1)]\leqslant-\left(\frac{3}{2}\right)^{n}[\varphi(n+1)-\varphi(n)]$$

令 $g(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n}[\varphi(n+1)-\varphi(n)]$，则 $g(1)=\frac{3}{2}[\varphi(2)-\varphi(1)]=-\frac{3}{2}$，$g(n+1)\leqslant-g(n)$.

所以 $\varphi(n+1)-\varphi(n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n}g(n)$，于是

$$\varphi(2)-\varphi(1)=\left(\frac{2}{3}\right)^{1}g(1),$$

$$\varphi(3)-\varphi(2)=\left(\frac{2}{3}\right)^{2}g(2),$$

$$\cdots$$

$$\varphi(n)-\varphi(n-1)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}g(n-1).$$



将这 $n-1$ 个式子相加,得

$$\varphi(n)=\varphi(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}g(k)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}g(k).$$

于是 $f(n+1)-f(n)=1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}g(k)$.采用与上面相同的方法,可得 $n\geqslant 3$ 时,

$$f(n)=f(1)+\sum_{i=1}^{n-2}\left[1+\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}g(k)\right]=n-1+\sum_{i=1}^{n-2}\left[\sum_{k=1}^{i}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}g(k)\right]$$

其中,$g(1)=\frac{3}{2}[\varphi(2)-\varphi(1)]=-\frac{3}{2}$, $g(n+1)\leqslant -g(n)$.

10.(1) 据条件得 $2+\frac{1}{a_{n+1}}<n(n+1)\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}\right)<2+\frac{1}{a_n}$. (1)

当 $n=1$ 时,由 $2+\frac{1}{a_2}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)<2+\frac{1}{a_1}$,即有 $2+\frac{1}{4}<\frac{2}{a_1}+\frac{2}{4}<2+\frac{1}{a_1}$,解得 $\frac{2}{3}<a_1<\frac{8}{7}$,因为 a_1 为正整数,故 $a_1=1$.

当 $n=2$ 时,由 $2+\frac{1}{a_3}<6\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{a_3}\right)<2+\frac{1}{4}$,解得 $8<a_3<10$,所以 $a_3=9$

(2) 解法1:由 $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9$,猜想 $a_n=n^2$.

下面用数学归纳法证明.

① 当 $n=1, 2$ 时,由(1)知 $a_n=n^2$ 均成立;

② 假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 成立,即 $a_k=k^2$,则 $n=k+1$ 时,由(1)式得

$$2+\frac{1}{a_{k+1}}<k(k+1)\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)<2+\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \frac{k^2(k+1)}{k^2-k+1}<a_{k+1}<\frac{k(k^2+k-1)}{k-1}$$

$$\Rightarrow (k+1)^2-\frac{(k+1)^2}{k^2+1}<a_{k+1}<(k+1)^2+\frac{1}{k-1}.$$

因为 $k\geqslant 2$ 时,$(k^2+1)-(k+1)^2=k(k+1)\cdot(k-2)\geqslant 0$,所以 $\frac{(k+1)^2}{k^2+1}\in(0, 1]$. 因为 $k-1\geqslant 1$,所以 $\frac{1}{k-1}\in(0, 1]$. 又 $a_{k+1}\in\mathbf{N}^*$,所以 $(k+1)^2\leqslant a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$. 故 $a_{k+1}=(k+1)^2$,即 $n=k+1$ 时,$a_n=n^2$ 成立

由①、②知,对任意 $n\in\mathbf{N}^*$, $a_n=n^2$.

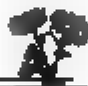
解法2:由 $a_1=1$, $a_2=4$, $a_3=9$,猜想:$a_n=n^2$.

下面用数学归纳法证明

① 当 $n=1, 2$ 时,由(1)知 $a_n=n^2$ 均成立;

② 假设 $n=k(k\geqslant 2)$ 成立,即 $a_k=k^2$,则 $n=k+1$ 时,

由(1)得 $2+\frac{1}{a_{k+1}}<k(k+1)\left(\frac{1}{k^2}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)<2+\frac{1}{k^2}$.



即 $$2+\frac{1}{a_{k+1}}<\frac{k+1}{k}+\frac{k(k+1)}{a_{k+1}}<2+\frac{1}{k^2} \qquad (2)$$

由(2)左式，得 $\frac{k-1}{k}<\frac{k^2+k-1}{a_{k+1}}$，即 $(k-1)a_{k+1}<k^3+k^2-k$．因为两端为整数，

则 $(k-1)a_{k+1}\leqslant k^3+k^2-k-1=(k+1)^2(k-1)$，于是 $a_{k+1}\leqslant(k+1)^2$． (3)

又由(2)右式得，$\frac{k(k+1)}{a_{k+1}}<\frac{2k^2+1}{k^2}-\frac{k(k+1)}{k^2}=\frac{k^2-k+1}{k^2}$，所以 $(k^2-k+1)a_{k+1}>k^3(k+1)$．

因为两端为正整数，则 $(k^2-k+1)a_{k+1}\geqslant k^4+k^3+1$．

所以 $$a_{k+1}\geqslant\frac{k^4+k^3+1}{k^2-k+1}=(k+1)^2-\frac{k}{k^2-k+1}$$

又因为 $k\geqslant2$，a_{k+1} 为正整数，

所以 $$a_{k+1}\geqslant(k+1)^2. \qquad (4)$$

据(3)式和(4)式，得 $a_{k+1}=(k+1)^2$，即 $n=k+1$ 时，$a_n=n^2$ 成立．由①、②知，对任意 $n\in\mathbf{N}^*$，$a_n=n^2$．

第6讲　其他可转化为递推的问题

1．C　设 $\triangle ABC$ 内有 n 个点时，小三角形有 a_n 个．

现增加一个点，则此点必落入某一个小三角形内，且此点把此小三角形分成与原来所有小三角形都不相叠的3个小三角形，故总数多出了两个，即 $a_{n+1}-a_n=2$．

因此，数列 $\{a_n\}$ 是以 $a_1=3$ 为首项，2为公差的等差数列，于是 $a_{2005}=3+(2005-1)\times2=4011$，故选C．

2．C

3．A　设跳到第 n 格的方法数为 a_n，则到达第 n 格的方法有两类：①向前跳1格到达第 n 格，方法数为 a_{n-1}；②向前跳2格到达第 n 格，方法数为 a_{n-2}．由加法原理知，$a_n=a_{n-1}+a_{n-2}$，由数列的递推关系得该数列的前8项为1，1，2，3，5，8，13，21，所以某人从格外跳到第8格的方法种数为21种．

本题亦可以用加法原理，利用常规分类讨论求解，但需要做到不重不漏，对思维的缜密性要求较高，这里借用递推思想，使问题简化，更有用的是，借助递推关系和数列知识，不仅可以求出到达第8格的方法数，而且对于到达任意格的方法数，皆可顺利求解，这是常规的分类讨论所无法实现的．

4．C　记 $$N_k=2007^{2007^{\cdot^{\cdot^{2007}}}}\Big\}k\text{ 重}$$，题目要求 N_{2007} 的末二位数．

$$N_{2007}=2007^{N_{2006}}=(2000+7)^{N_{2006}}=2000\times M+7^{N_{2006}}$$

其中，M 为正整数．由此可得 N_{2007} 的末二位数与 $7^{N_{2006}}$ 的末二位数字相同，首先来观察 7^n 的末二位数字的变化规律．

n	2	3	4	5	6	7	8	9	…
7^n 的末二位数字	49	43	01	07	49	43	01	07	…



7^n 的末二位数字的变化是以 4 为周期的规律循环出现.

$$N_{2008}=(2007)^{N_{2007}}=(502\times 4-1)^{N_{2007}} \quad (N_{2007}\text{ 为奇整数})$$
$$=4M_1-1 \quad (M_1\text{ 为正整数})$$
$$=4(M_1-1)+3.$$

因此,$7^{N_{2008}}=7^{4(M_1-1)+3}$ 与 7^3 的末二位数相同,为 43. 应选 C.

5. A　本题考查递推数列公式和概率的求法

由已知,得 $a_1=\frac{1}{7},a_2=\frac{3}{7},a_3=\frac{6}{7},a_4=\frac{3}{7},\cdots,a_{2n}=\frac{3}{7},a_{2n+1}=\frac{6}{7},n\in N^*$.

于是 $a_{2n+1}-a_{2n}=\frac{3}{7}$,因此,对任意正偶数 n,$a_{n+1}-a_n=\frac{3}{7}$ 总成立,故所求概率为 1,选 A.

6. A　可以从一般情形考虑,然后再特殊化而得到所求结果. 设有 n 个符合题设的平面,球面被分成 a_n 部分. 易知,$a_1=2,a_2=4,a_3=8$.

因为 n 个平面都过球心,所以截面都是大圆,而每两个大圆在球面都有 2 个交点,故第 n 个平面与已有的 $n-1$ 个平面截球面得的每个大圆都有 2 个交点. 当 $n\geqslant 3$ 时,第 n 个大圆与前第 $n-1$ 大圆共有 $2(n-1)$ 个交点,且其中任一交点均不会与任何前 $n-1$ 个大圆的交点重合,这是由于题设:任何 3 个平面都不相交于一直线,即任何三个大圆都不过同一直径. 这样,第 n 个大圆被前 $n-1$ 个大圆分割成 $2(n-1)$ 段,而这其中的每一段又把前 $n-1$ 个大圆划分成的 a_{n-1} 个区域(球面多边形)中的 $2(n-1)$ 个区域中相应的一个区域一分为二,于是 a_n 较 a_{n-1} 增加了 $2(n-1)$. 所以

$$\begin{aligned}a_n&=a_{n-1}+2(n-1)=a_{n-2}+2(n-2)+2(n-1)\\&=\cdots\\&=a_1+2\cdot 1+2\cdot 2+\cdots+2\cdot(n-1)\\&=a_1+2\cdot\frac{1+(n-1)}{2}\cdot(n-1)\\&=2+n(n-1)=n^2-n+2.\end{aligned}$$

这是一般性结果. 当 $n=10$ 时,即得 $a_{10}=92$,选 A.

说明　如假定 a_n 是 n 的二次函数:$a_n=an^2+bn+c$,则由已知 $a_1=2,a_2=4,a_3=8$,即可求出系数 $a=1,b=-1,c=2$. 所以 $a_n=n^2-n+2$.

7. $S_n=\begin{cases}\frac{5n}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{5n-1}{2}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$　将文字语言翻译成数学符号语言:$a_n+a_{n-1}=5(n\geqslant 2),a_1=2$. 所以数列为 2,3,2,3,2,…

这是周期数列,最小正周期为 2,$a_2=3$. 利用分类思想求 S_n,当 $n=2k(k\in N^*)$,$S_n=2k+3k=5k=\frac{5n}{2}$;当 $n=2k+1(k\in N)$ 时,$S_n=S_{2k}+a_{2k+1}=5k+2=\frac{5(n-1)}{2}+2=\frac{5n-1}{2}$. 所以



$$S_n=\begin{cases}\frac{5n}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \frac{5n-1}{2}, & n\text{ 为奇数}\end{cases}$$

8. 1008017. 设第 i 个拐角处的数为 a_i. 显然，$a_1=2$，$a_{2i}=a_{2i-1}+i$，$a_{2i+1}=a_{2i}+(i+1)$. 因 $2007=2\times1003+1$，所以，$a_{2007}=1+2(1+2+\cdots+1003)+1004=1004^2+1=1008017$.

9. $\frac{2^n}{(n+1)!}$. 记所求概率为 P_n. 先求初始值 P_2. 由于 3 个数中的最大数只能排在第 2 排的两个位置上，故 $P_2=\frac{2}{3}$. 再寻求递推关系：

对于 $n+1$ 行的数阵，最大的第 $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ 个数应在第 $n+1$ 行，其概率为

$$\frac{n+1}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}=\frac{2}{n+2}$$

然后可任意填第 $n+1$ 行，剩下的 $\frac{n(n+1)}{2}$ 个数填入前 n 行，符合要求的概率即为 P_n，故 $P_{n+1}=\frac{2}{n+2}P_n$，所以 $P_n=\frac{2}{n+1}\cdot\frac{2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{4}P_2=\frac{2^n}{(n+1)!}$.

10. (19，44). 若将粒子的运动轨迹定义为数对 (x,y)，则它的运动整点可排成数表

(0,0)
(0,1) (1,1) (1,0)
(2,0) (2,1) (2,2) (1,2) (0,2)
(0,3) (1,3) (2,3) (3,3) (3,2) (3,1) (3,0)
…

通过推算可知，经过 $2=1\times2$ 秒，粒子运动到点(1,1)；经过 $6=2\times3$ 秒，粒子运动到(2,2)；经过 $12=3\times4$ 秒，粒子运动到(3,3)；… 则经过 $44\times45=1980$ 秒，粒子运动到点(44,44). 根据该粒子的运动规律，粒子继续运动 25 秒，到达点(19,44).

11. $\frac{182}{729}$. 寻求递推关系式. 设壁虎爬行 n m 回到顶点 A 的爬法有 a_n 种，壁虎爬行 n m 不回到顶点 A 的爬法有 b_n 种. 由于壁虎每到一个顶点的爬行方法有 3 种，则爬行 n m 共有 3^n 种方法. 故 $a_n+b_n=3^n$. 另外，第 $n+1$ 次回到顶点 A，则第 n 次壁虎必不在顶点 A，因而 $a_{n+1}=b_n$，故 $a_n+a_{n+1}=3^n$. 于是得到递归关系式 $a_n=3^{n-1}-a_{n-1}$，$n\geq2$. 且易得 $a_1=0$，则 $a_7=3^6-(3^5-a_5)=3^6-3^5+a_5=3^6-3^5+(3^4-a_4)=\cdots=3^6-3^5+3^4-3^3+3^2-3$.

所以 $a_7=\frac{3(1-3^6)}{1-(-3)}=3\times182$，故 $P(A)=\frac{3\times182}{3^7}=\frac{182}{729}$.

12. (m^2-m+2). 解决本题的关键是确定平面上的 m 个圆最多可确定互不重叠的区域. 设平面上的 $k(k\in\mathbf{N}^*)$ 个圆最多可确定 a_k 个互不重叠的区域. 由于第 k 个圆和前 k 个圆最多有 $2k$ 个交点(不同于前 k 个圆的交点)，且每相邻两个交点都对应一个新增区域，所以 $a_{k+1}=a_k+2k$. 分别令 $k=1,2,3,\cdots$，



$m-1$，可得到 $m-1$ 个等式，叠加得：$a_m = a_2 + 2(1+2+3+\cdots+m-1)$. 又知 $a_1 = 1$，所以 $a_m = m^2 - m + 1$，故平面上的 m 个圆最多能确定 m^2-m+1 个互不重叠的区域，从而可知满足 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$ 的集合组 $(A_1, A_2, A_3, \cdots, A_m)$ 有 $(m^2-m+1)^n$ 个.

13. (1) $a_4 = 01001$，$a_5 = 01001010$.

(2) $a_{k+1} = a_k a_{k-1}$ $(k \geqslant 2)$.

(3) 由(2)可知 $b_1 = 1$，$b_2 = 1$，$b_3 = 2$，$b_{n+2} = b_{n+1} + b_n$. 所以 $b_{n+2} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}b_{n+1} = (b_{n+1}+b_n) - \frac{\sqrt{5}+1}{2}b_{n+1}$ $= \frac{1-\sqrt{5}}{2}b_{n+1} + b_n = \frac{1-\sqrt{5}}{2}\left(b_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}b_n\right)$，所以数列 $\{b_{n+1} - \frac{\sqrt{5}+1}{2}b_n\}$ 是等比数列.

14. 令长度为 n 的"优数"的个数是 a_n，则 $a_1 = 8$. 令 $n \geqslant 2$，对于 a_n，一方面，在长度为 $n-1$ 的"非优数"的末尾添加数字 8，就变成为长度为 n 的"优数"，且这样的"优数"有 $9\times 10^{n-2} - a_{n-1}$ 个；在长度为 $n-1$ 个"优数"的末尾添加一个非 8 数字，变成为长度为 n 的"优数"，且这样的"优数"有 $9 \cdot a_{n-1}$，显然这两类长度为 n 的"优数"不相同(个位数不同). 另一方面，反过去亦然，这就构成一一对应，于是有

$$a_n = (9\times 10^{n-2} - a_{n-1}) + 9\cdot a_{n-1} = 8\cdot a_{n-1} + 9\times 10^{n-2} \ (n \geqslant 2),$$

即
$$\frac{a_n}{10^{n-2}} = 8\cdot\frac{a_{n-1}}{10^{n-2}} + 9 = \frac{4}{5}\cdot\frac{a_{n-1}}{10^{n-3}} + 9.$$

令 $b_n = \frac{a_n}{10^{n-2}}$，则 $b_n = \frac{4}{5}\cdot b_{n-1} + 9 (n \geqslant 2)$，$b_1 = 10\cdot a_1 = 80$. 令 $b_n = c_n + t$（t 为待定的常数），则

$$c_n + t = \frac{4}{5}\cdot(c_{n-1}+t) + 9 = \frac{4}{5}\cdot c_{n-1} + \left(\frac{4}{5}\cdot t + 9\right).$$

令 $\frac{4}{5}\cdot t + 9 = t$，则

$$c_n = \frac{4}{5}\cdot c_{n-1} = \cdots = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot c_1 = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot(b_1 - 45) = \left(\frac{4}{5}\right)^{n-1}\cdot(80-45) = 35\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1},$$

$$b_n = 35\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{n-1} + 45.$$

$$a_n = 10^{n-2}\cdot b_n = 10^{n-2}\left(35\cdot\frac{4^{n-1}}{5^{n-1}} + 45\right) = 7\times 2^{3n-4} + 45\times 10^{n-2}$$

$$= \frac{7}{16}\times 8^n + \frac{9}{20}\cdot 10^n \ (n \geqslant 2).$$

于是长度不超过 n 的所有的"优数"的个数是

$$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = \frac{7}{16}\sum_{k=1}^{n}8^k + \frac{9}{20}\cdot\sum_{k=1}^{n}10^k = \frac{1}{2}\cdot(8^n + 10^n) - 1 \ (n \geqslant 1).$$

15. (1) 由已知得，$p_1 = 1$，$q_1 = 0$，$p_2 = \frac{1}{6}$，$q_2 = \frac{5}{6}$，$p_3 = \frac{1}{6}p_2 + \frac{5}{6}q_2 = \frac{26}{36} = \frac{13}{18}$.

(2) 由题意得 $p_n = \frac{1}{6}p_{n-1} + \frac{5}{6}q_{n-1}$，$q_n = \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{5}{6}p_{n-1} (n \geqslant 2)$，两式相减得

$$p_n - q_n = \frac{1}{6}(p_{n-1} - q_{n-1}) + \frac{5}{6}(q_{n-1} - p_{n-1}) = -\frac{2}{3}(p_{n-1} - q_{n-1}),$$



即数列$\{p_n-q_n\}$是公比为$-\frac{2}{3}$的等比数列.

(3) 由结论(2)得$p_n-q_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}(p_1-q_1)=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}$.

又$p_n+q_n=1$,所以$p_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+q_n=\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+(1-p_n)$.

从而$p_n=\frac{1}{2}\left(-\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}(n\in\mathbf{N}^*)$.因此$\lim\limits_{n\to\infty}p_n=\frac{1}{2}$.

16. 答案是否定的.按顺时针方向将边依次标号为1,2,…,99.用$f(i)$表示第i条边的颜色.初始状态时,$f(2i-1)=$红,$f(2i)=$蓝,$i=1,2,\cdots,49$,$f(99)=$黄.现在对$i=1,2,\cdots,99$,定义

$$g(i)=\begin{cases}0, & f(i-1)=f(i+1),\\ 1, & f(i-1),f(i),f(i+1)=(\text{红、黄、蓝})\text{或}(\text{黄、蓝、红})\text{或}(\text{蓝、红、黄}),\\ -1, & f(i-1),f(i),f(i+1)=(\text{红、蓝、黄})\text{或}(\text{蓝、黄、红})\text{或}(\text{黄、红、蓝}),\end{cases}$$

其中,$f(0)=f(99)$,$f(1)=f(100)$.

易知$\sum\limits_{i=1}^{99}g(i)$是题述操作下的一个不变量.于是由于初始时$\sum\limits_{i=1}^{99}g(i)=-3$,而欲达到的最终状态$\sum\limits_{i=1}^{99}g'(i)=3$.因此结论不成立.

17. 令$M_n=\max\{|a_n|,|b_n|,|c_n|,|d_n|\}$,则$M_n$是非负整数,且由递推关系易知$M_{n+1}\leqslant M_n$ $(n=1,2,\cdots)$.

由此可知,存在自然数k,使得

$$M_k=M_{k+1}=M_{k+2}=\cdots \tag{1}$$

记$M=M_k$,以下证$M=0$.若不然,则$M>0$.

由于当$n=k+1$时,a_n,b_n,c_n,d_n均为非负整数,所以利用递推关系和(1)式可推出,a_n,b_n,c_n,d_n中至少有一个为M,且与其相邻的两数中至少有一为0.由于每次都出现0,从而a_n,b_n,c_n,d_n中至少有两个相邻的数相同.

对于$n=k+1$,由循环对称性,不妨设$a_{k+1}=M$,由以上证明可知$(a_{k+1},b_{k+1},c_{k+1},d_{k+1})$只可能为以下6种形式:$(M,0,0,d)$,$(M,0,c,c)$,$(M,0,c,M)$,$(M,M,c,0)$,$(M,b,b,0)$,$(M,b,0,0)$,其中$0\leqslant b,c,d\leqslant M$.

若 $$(a_{k+1},b_{k+1},c_{k+1},d_{k+1})=(M,0,0,d),$$

则 $$(a_{k+2},b_{k+2},c_{k+2},d_{k+2})=(M,0,d,M-d).$$

由于$(M,0,d,M-d)$中有相邻两数值相同,则$d=0$或$M=2d$.如果$d=0$,则

$$(a_{k+3},b_{k+3},c_{k+3},d_{k+3})=(M,0,M,0).$$

如果$M=2d$,则$d>0$,且$(a_{k+3},b_{k+3},c_{k+3},d_{k+3})=(M,d,0,d)$.

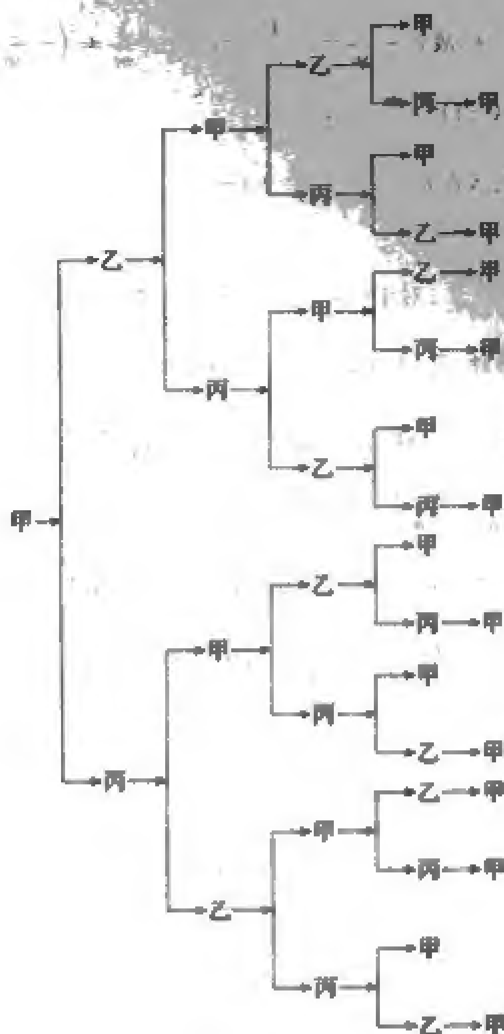
无论何种情况,$(a_{k+3},b_{k+3},c_{k+3},d_{k+3})$中都没有取值相同的相邻两项,引出矛盾!

当$(a_{k+1},b_{k+1},c_{k+1},d_{k+1})$取其他5种形式时,同样也引出矛盾.于是$M=M_k=0$,即

$$a_k=b_k=c_k=d_k=0.$$



18. (1) 如下图示



第 18 题图

共 10 种不同的传球方法.

(2) ① $a_1=0, b_1=m-1, a_2=m-1$，a_{n+1} 表示传球 $n+1$ 次、第 $n+1$ 次传给甲，可以分两步进行：第一步传球 n 次，第 n 次不传给甲，共 b_n 种；第二步再传给甲，共 1 种.

由乘法原理知 $a_{n+1}=b_n$.

② a_n+b_n 表示传球 n 次的所有不同方法种数，而每次传球都有 $m-1$ 种方法，共传球 n 次.

所以 $a_n+b_n=(m-1)^n$.

③ 因为 $a_n+b_n=(m-1)^n$，所以 $a_n+a_{n+1}=(m-1)^n$. 因为 $c_n=\frac{a_n}{(m-1)^n}$，所以上式可变为 $c_{n+1}+\frac{1}{m-1}c_n=\frac{1}{m-1}$，所以 $c_{n+1}-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m-1}\left(c_n-\frac{1}{m}\right)$，所以 $\{c_n-\frac{1}{m}\}$ 是以 $-\frac{1}{m-1}$ 为公比的等

比数列.

④ 因为 $a_1=0$，所以 $c_1=0$，故 $c_1-\frac{1}{m}=-\frac{1}{m}$，所以 $c_n-\frac{1}{m}=\left(-\frac{1}{m}\right)\cdot\left(-\frac{1}{m-1}\right)^{n-1}$，所以 $a_n=c_n(m-1)^n=\frac{1}{m}(m-1)^n+(-1)^n\cdot\frac{m-1}{m}$.

将(1)中 $m=3$，$n=5$ 代入得 $a_5=\frac{1}{3}\times 2^5+(-1)^5\times\frac{2}{3}=10$.

19. (1) $a_n=n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(2) 由(1)知 $b_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n$. 对于 $(0,+\infty)$ 上的凹函数 $y=x^{n+1}$，有 $y'=(n+1)x^n$. 根据定理，得 $\frac{x_1^{n+1}-x_2^{n+1}}{x_1-x_2}<(n+1)x_1^n$. 整理，得 $x_1^n[(n+1)x_2-nx_1]<x_2^{n+1}$. 令 $x_1=1+\frac{1}{2n}$，$x_2=1+\frac{1}{2(n+1)}$，得 $(n+1)x_2-nx_1=1$，故 $x_1^n<x_2^{n+1}$，即 $\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n<\left[1+\frac{1}{2(n+1)}\right]^{n+1}$，所以 $b_n>b_{n+1}$.

(3) 因为 $C_n^r\cdot\left(\frac{1}{2n}\right)^r=\frac{n}{n}\cdot\frac{n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n-r+1}{n}\cdot\frac{1}{r!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^r\leqslant\left(\frac{1}{2}\right)^r$，所以 $b_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=1+\sum_{r=1}^{n}C_n^r\left(\frac{1}{2n}\right)^r\leqslant 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n<2$.

又由(2)，得 $b_n>b_{n-1}>\cdots>b_2>b_1=\frac{3}{2}$.（或 $b_n=\left(1+\frac{1}{2n}\right)^n=1+\frac{1}{2}+\sum_{r=2}^{n}C_n^r\left(\frac{1}{2n}\right)^r\geqslant\frac{3}{2}$），所以 $\frac{3}{2}\leqslant b_n<2$.

